Determinanter for $n \times n$-matricer.

Vi har:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Lad $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$ matrix.
Undermatricen A_{ij} er den $(n-1) \times (n-1)$ matrix, der fremkommer ved at slette række nr. i og søjle nr. j fra A.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cancel{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{ij}} & \cancel{\cdots} & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & \cancel{\vdots} & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cancel{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Vi definerer: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

Definition: Vi har

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

Eksempel:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \det \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

Sætning: For $A = [a_{ij}]$ gælder:

Udvikling efter række nr. i:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}.$$

Udvikling efter søjle nr. j:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Eksempel: Triangulære matricer (øvre)

$$\det \begin{bmatrix} u_{11} & * & * & * \\ 0 & u_{22} & * & * \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}.$$

Determinanter og rækkeoperationer:

Følgende gælder for en $n \times n$ matrix A (med rækkerne $\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_n$).

- Fremkommer matricen B ved at addere k gange række i fra A til række j ($i \neq j$), da gælder: $\det B = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} --\ \mathbf{r}_i\ -- \\ \vdots \\ --\ \mathbf{r}_j\ -- \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} --\ \mathbf{r}_i\ -- \\ \vdots \\ \mathbf{r}_j + k\mathbf{r}_i \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at ombytte række i og j fra A ($i \neq j$), da gælder: $\det B = -\det A$.

$$A = \begin{bmatrix} --\ \mathbf{r}_i\ -- \\ \vdots \\ --\ \mathbf{r}_j\ -- \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} --\ \mathbf{r}_j\ -- \\ \vdots \\ --\ \mathbf{r}_i\ -- \end{bmatrix}$$

- Fremkommer matricen B ved at gange række i fra A med k, da gælder: $\det B = k \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} --\ \mathbf{r}_i\ -- \\ \vdots \end{bmatrix} \to B = \begin{bmatrix} --\ k\mathbf{r}_i\ -- \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Sætning: En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis $\det A \neq 0$.