Egenværdier og egenvektorer.

Lad A være en $n \times n$ matrix. Et tal $\lambda \in \mathbb{C}$ kaldes en **egenværdi** for A, hvis der findes (mindst en) vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, der opfylder matrixligningen

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \qquad (*)$$

En vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, der opfylder $(*)$ kaldes en tilhørende **egenvektor**.

Matrixligningen $(*)$ har en ikke-triviel løsning netop når

$$A - \lambda I_n$$

er ikke-invertibel. Egenværdierne for A kan derfor findes ved at løse den **karakteristiske ligning**

$$(K) \qquad \det(A - \lambda I_n) = 0,$$

hvor venstresiden kan vises at være et polynomium af grad n (polynomium i λ).

Givet en egenværdi $\tilde{\lambda}$, finder man de tilhørende egenvektorer ved at løse matrixligningen

$$(A - \tilde{\lambda} I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Notation: Underrummet

$$\mathrm{Nul}(A - \tilde{\lambda} I_n) \subseteq \mathbb{R}^n$$

kaldes **egenrummet** hørende til egenværdien $\tilde{\lambda}$.

Bemærk: vi ved kun at $\dim(\mathrm{Nul}(A - \tilde{\lambda} I_n)) \geq 1$. Dimensionen kan meget vel være > 1. Normalt finder man en *basis* af egenvektorer for $\mathrm{Nul}(A - \tilde{\lambda} I_n)$ hørende til egenværdien $\tilde{\lambda}$.

Procedure: Givet en $n \times n$ matrix A.

- Find A's egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ved at løse den karakteristiske ligning

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

- For hver egenværdi λ_i, find en basis af egenvektorer for egenrummet

$$\mathrm{Nul}(A - \lambda_i I_n).$$

Eksempel 1. Find egenværdierne og de tilhørende egenvektorer for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Karakteristisk ligning:

$$0 = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6. \Rightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ -3. \end{cases}$$

Egenvektor for $\lambda = 2$: Vi løser

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor for $\lambda = -3$: Vi løser

$$\begin{bmatrix} 1-(-3) & 2 \\ 2 & -2-(-3) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Eksempel 2. Egenværdierne for en øvre trekantmatrix $U = [u_{ij}]$ er netop diagonal elementerne $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$. Følger fra:

$$\det(U - \lambda I_n) = \det \begin{bmatrix} u_{11}-\lambda & * & * & * \\ 0 & u_{22}-\lambda & * & * \\ 0 & \cdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (u_{11}-\lambda)(u_{22}-\lambda)\cdots(u_{nn}-\lambda).$$

Hvad kan det bruges til?

Eksempel: Lineære differentialligningssystemer. Vi betragter differentialligningssystemet

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

Det kan skrives kort

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

hvor $A = [a_{ij}]$ er en kvadratisk matrix. En løsning til systemet er en vektorfunktion $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]^T$, der opfylder samtlige ligninger i systemet.

Vi gætter: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$. Det indsættes i ligningen:

$$\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = A\mathbf{v}e^{\lambda t} \Rightarrow A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Dvs: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ er en løsning, hvis λ og $\mathbf{v}$ er hhv. egenværdi og egenvektor for A.

Eksempel: Løs begyndelsesværdiproblemet

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = (1, 4).$$

Fra før:

Egenværdi $\lambda = 2$, tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenværdi $\lambda = -3$, tilhørende egenvektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Dvs.

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-3t}.$$

Konstanterne c_1 og c_2 bestemmes ved at løse:

$$c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = -6/5, \quad c_2 = 7/5.$$

Løsning:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{12}{5} e^{2t} + \frac{7}{5} e^{-3t} \\ -\frac{6}{5} e^{2t} - \frac{14}{5} e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Diagonalisering.

Definition. Lad A være en $n \times n$-matrix. A siges at være diagonaliserbar hvis A er similær med en diagonal matrix, dvs.

$$A = PDP^{-1},$$

hvor D er en diagonal matrix.

Sætning. Lad A være en $n \times n$-matrix. A er diagonaliserbar hvis og kun hvis A har n lineært uafhængige egenvektorer.

I fald A har n lineært uafhængige egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kan vi skrive

$$A = PDP^{-1},$$

hvor $P = [\mathbf{v}_1 \, \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n]$ og $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Sætning. Lad A være en $n \times n$-matrix. Hvis A har n forskellige egenværdier, da har A netop n lineært uafhængige egenvektorer og A kan derfor diagonaliseres.

En afsluttende sætning om diagonalisering.

Sætning. Lad A være en $n \times n$-matrix med de forskellige egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ ($r < n$ er tilladt).

- For $1 \leq k \leq r$: dimensionen af egenrummet hørende til λ_k er mindre end eller lig med multipliciteten af λ_k som rod i det karakteristiske polynomium for A. Det formuleres ofte således: den *geometriske multiplicitet* af et egenrum er mindre end eller lig med den *algebraiske multiplicitet* af egenrummet.
- Matricen A er diagonaliserbar hvis og kun hvis summen af dimensionerne of egenrummene hørende til $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ er præcis n. Dvs. hvis og kun hvis den algebraiske og geometriske multiplicitet er ens for alle egenrum.
- Hvis A er diagonaliserbar, og $\mathcal{B}_k$ er en basis af egenvektorer for egenrummet hørende til λ_k, da udgør

  $$\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_r\}$$

  en basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for A.