Underrum af $\mathbb{R}^n$.

Definition 1: Et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er en delmængde $H \subseteq \mathbb{R}^n$, der opfylder:

- $\mathbf{0} \in H$
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
- $\mathbf{u} \in H \Rightarrow r\mathbf{u} \in H$ for enhver skalar r.

Eksempler:

- Lad $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$. Så er

  $$H = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.

- Lad A være en $m \times n$-matrix. Så er

  $$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

  et underrum af $\mathbb{R}^n$.

Definition 2: Lad $A = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$ være en $m \times n$-matrix.

- **Søjlerummet** for A er det underrum $\mathrm{Col}\, A$ af $\mathbb{R}^m$, der udspændes af A's søjlevektorer. Dvs.

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}.$$

- **Nulrummet** for A er det underrum af $\mathbb{R}^n$, der er givet ved

$$\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Definition 3: En **basis** for et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er en mængde af *lineært uafhængige* vektorer $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ fra H, der *udspænder* H. Dvs.

$$H = \mathrm{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}.$$

Basis for $\mathrm{Nul}(A)$: En basis for $\mathrm{Nul}(A)$ findes ved at opskrive løsningen til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ på vektorform:

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots c_k\mathbf{b}_k,$$

hvor systemet først er reduceret ned til reduceret trappeform. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k\}$ udgør så en basis for $\mathrm{Nul}(A)$.

Basis for $\mathrm{Col}(A)$: Pivot søjlerne for en matrix A udgør en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Definition 4: Lad $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p\}$ være en basis for et underrum H af $\mathbb{R}^n$. Koordinatvektoren for $\mathbf{x} \in H$ relativt til $\mathcal{B}$ er givet ved

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}, \qquad \text{hvor } \mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_p\mathbf{b}_p.$$

Bemærkning: Koordinatvektoren for $\mathbf{x} \in H$ er den entydige løsning til ligningssystemet

$$\left[\mathbf{b}_1\,\mathbf{b}_2\,\cdots\,\mathbf{b}_p \,|\, \mathbf{x}\right].$$

Definition 5: Dimensionen af et underrum H af $\mathbb{R}^n$ er antallet af vektorer i en vilkårlig basis for H. Dimensionen af H benævnes $\dim(H)$. Pr. definition er $\dim(\{\mathbf{0}\}) = 0$.

Definition 6: Rangen af en matrix A er dimensionen af A's søjlerum. Vi benævner rangen $\operatorname{rank}(A)$, dvs.

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Col} A).$$

Sætning (om matricers rang): Hvis A har n søjler, da gælder

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{Nul} A) = n.$$

Sætning (om baser for underrum): Lad H være et p dimensionalt underrum af $\mathbb{R}^n$.

- p lineært uafhængige vektorer fra H udgør automatisk en basis for H.
- Enhver mængde af p vektorer fra H, der udspænder H udgør automatisk en basis for H.

Invertible matricer.

Sætning: Lad A være en $n \times n$ matrix. Så er følgende udsagn ækvivalente:

a) A er en invertibel matrix.

b) $A \sim I_n$.

c) A har n pivot'er.

d) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun den trivielle løsning.

e) A's søjler er lineært uafhængige.

f) Den lineære transformation $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ er 1-1.

g) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

h) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^n$.

i) Den lineære transformation $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ afbilder $\mathbb{R}^n$ på $\mathbb{R}^n$.

j) Der findes en $n \times n$-matrix C, således $CA = I_n$.

k) Der findes en $n \times n$-matrix D, således $AD = I_n$.

l) A^T er en invertibel matrix.

m) A's søjler udgør en basis for $\mathbb{R}^n$.

n) $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$.

o) $\dim(\operatorname{Col} A) = n$.

p) $\operatorname{rank}(A) = n$.

q) $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$.

r) $\dim(\operatorname{Nul} A) = 0$.