Lineære transformationer:

En **lineær transformation** $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en afbildning, med definitionsmængde $\mathbb{R}^n$ og værdimængde i $\mathbb{R}^m$, der opfylder

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Identitetsmatricen $I_n = [a_{i,j}]$ er den $n \times n$-matrix, der har indgangene

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} .$$

Eksempel:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Søjlevektorerne i I_n kaldes $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Dvs. $\mathbf{e}_j$ er vektoren hvor indgang nr. j er 1, og de øvrige indgange er 0.

Sætning. Givet en lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, da findes der en entydigt bestemt $m \times n$-matrix A, der opfylder $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Matricen A er givet ved søjlevektorerne:

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}.$$

Vi kalder A **standardmatricen** for T.

Givet en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Vi siger følgende:

- T er **1-1 (one-to-one)** hvis $T(\mathbf{v}_1) = T(\mathbf{v}_2) \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
- T er **på (onto)** $\mathbb{R}^m$ hvis ligningen $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ har mindst en løsning for ethvert $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Sætning 1. Den lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er 1-1, hvis og kun hvis, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Sætning 2. Givet en lineær transformation $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ med tilhørende standardmatrice A. Så gælder:

- T er på (onto) $\mathbb{R}^m$, hvis og kun hvis søjlerne i A udspænder hele $\mathbb{R}^m$.
- T er 1-1, hvis og kun hvis søjlerne i A er lineært uafhængige.