Matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

Sætning: Lad A være en $m \times n$-matrix, og lad $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Den fuldstændige løsning til matrixligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, der antages at være konsistent, er givet ved

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_h + \mathbf{p}, \qquad (L)$$

hvor $\mathbf{p}$ er en partikulær løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og $\mathbf{v}_h$ er den fuldstændige løsning til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis.

(1) Først vises, at (L) giver en løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Da afbildningen givet ved A er lineær, så har vi

$$A(\mathbf{v}_h + \mathbf{p}) = A\mathbf{v}_h + A\mathbf{p} = \mathbf{0} + \mathbf{b} = \mathbf{b},$$

for enhver løsning $\mathbf{v}_h$ til den homogene ligning $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(2) Lad nu $\mathbf{w}$ være en *vilkårlig* løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.Vi skal vise, at $\mathbf{w}$ kan skrives på formen (L). Da afbildningen givet ved A er lineær, så har vi

$$A(\mathbf{w} - \mathbf{p}) = A\mathbf{w} - A\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},$$

dvs. $\mathbf{w} - \mathbf{p} = \mathbf{v}_h$ for en løsning $\mathbf{v}_h$ til den homogene ligning, og derfor har vi $\mathbf{w} = \mathbf{v}_h + \mathbf{p}$.