Den inhomogene ligning

Løsningsstruktur

Vi betragter

$$ay'' + by' + cy = q(x), \qquad (L),$$

hvor $a, b, c \in \mathbb{R}$ og $q(x)$ er kontinuert på I.

Tilhørende homogene ligning

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H).$$

Den fuldstændige løsning til (L): den fuldstændig løsning til (H) adderet til en partikulær løsning til (L). Dvs.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

Den inhomogene ligning II

Superpositions princippet

Antag, at $y_1(x)$ og $y_2(x)$ opfylder

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = q_1(x)$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = q_2(x).$$

Så opfylder $y = \alpha y_1 + \beta y_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ligningen

$$ay'' + by' + cy = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x).$$

Typiske eksempler

$$\gamma y'' + \eta y' + \sigma y = q(x)$$

$q(x)$	Standard gæt $y_p(x)$
a	A
$ax + b$	$Ax + B$
$ax^2 + bx + c$	$Ax^2 + Bx + C$
$a\sin(\beta x) + b\cos(\beta x)$	$A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x)$
$e^{\alpha x}[a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)]$	$e^{\alpha x}[A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)]$
$ae^{\beta x}$	$Ae^{\beta x}$
$(ax + b)e^{\alpha x}$	$(Ax + B)e^{\alpha x}$
$(ax^2 + bx + c)e^{\alpha x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{\alpha x}$

Hvis standard gæt fejler: multiplicer med x!

Eksempel

Opgave med begyndelsesbetingelser

Find den entydigt bestemte løsning til

$$y'' + y' - 6y = 2x,$$

der opfylder $y(0) = -1/18$ og $y'(0) = 2/3$.

Løsning

Vi løser først den homogene ligning

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Bemærk, at karakterligningen er: $R^2 + R - 6 = 0$, så $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$. Altså,

$$R = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}.$$

Dvs.

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}.$$

Eksempel

Løsning (fortsat)

Vi finder nu en partikulær løsning til den inhomogene ligning: gæt $y_p(x) = Ax + B \Rightarrow y_p'(x) = A$ og $y_p''(x) = 0$. Ved indsættelse fås, at

$$A - 6(Ax + B) = 2x \Rightarrow -6A = 2, \quad A - 6B = 0.$$

Dvs. $A = -\frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{18}$ og $y_p(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{18}$. Fuldstændig løsning til den inhomogene ligning

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{18} \Rightarrow y'(x) = -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x} - \frac{1}{3}.$$

Vi sætter nu $y(0) = -1/18$ og $y'(0) = 2/3$: det giver

$$\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{1}{18} & = -\frac{1}{18} \\ -3c_1 + 2c_2 - \frac{1}{3} & = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 & = 0 \\ -3c_1 + 2c_2 & = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1/5 \\ c_2 = 1/5. \end{cases}$$

Altså ender vi med løsningen

$$y(x) = -\frac{e^{-3x}}{5} + \frac{e^{2x}}{5} - \frac{x}{3} - \frac{1}{18}.$$