Volumen og areal

Lad R være et begrænset område i xy-planen. Så defineres **arealet** af R som

$$\text{areal}(R) := \iint_R 1\, dA.$$

For $f(x,y)$ en positiv kontinuert funktion på R, defineres **volumen** af punktmængden

$$T = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in R, 0 \le z \le f(x,y)\}$$

som

$$\text{vol}(T) := \iint_R f(x,y)\, dA.$$

Mere generelt, for

$$T = \{(x,y,z) \,|\, (x,y) \in R, z_{\text{bund}}(x,y) \le z \le z_{\text{top}}(x,y)\}$$

har vi,

$$\text{vol}(T) := \iint_R [z_{\text{top}}(x,y) - z_{\text{bund}}(x,y)]\, dA.$$

Simple Områder

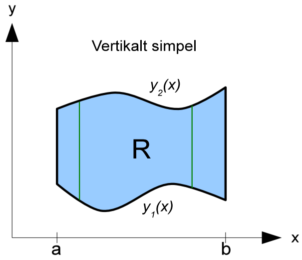
Et område R i xy-planen kaldes:

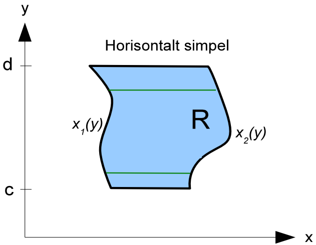
Vertikalt simpel

Hvis $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, hvor y_1 og y_2 er kontinuerte funktioner af x.

Horisontalt simpel

Hvis $R = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, hvor x_1 og x_2 er kontinuerte funktioner af y.





Evaluering af planintegralet

Lad $f(x, y)$ være en kontinuert funktion defineret på R.

Vertikalt simpelt R, evaluering af planintegralet

Hvis $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, hvor y_1 og y_2 er kontinuerte funktioner af x, så gælder

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

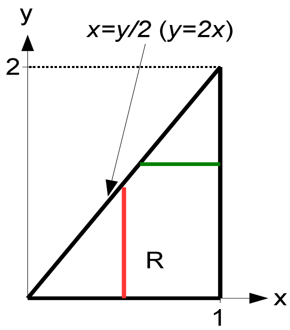
Horisontalt simpelt R, evaluering af planintegralet

Hvis $R = \{(x, y) | c \leq y \leq d,\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$, hvor x_1 og x_2 er kontinuerte funktioner af y, så gælder

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Eksempel

Udregn $V := \int_0^2 \int_{y/2}^1 ye^{x^3}\,dx\,dy$.



Vi skal derfor integrere over (horisontalt s.)

$R = \{(x,y) | 0 \le y \le 2, y/2 \le x \le 1\}$.

Problem: ingen stamfunktion til e^{x^3}!

Men R er også vertikalt simpel:

$$R = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2x\}.$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{2x} ye^{x^3}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}e^{x^3}\right]_{y=0}^{2x} dx = \int_0^1 2x^2 e^{x^3}\,dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}(e-1) \approx 1.1455.$$

Egenskaber ved planintegralet

Lad $f(x, y)$ og $g(x, y)$ være kontinuerte funktioner defineret på R. Så gælder

- $\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA.$
- $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA.$
- Hvis $m \leq f(x,y) \leq M$ for $(x,y) \in R$, så gælder

$$m \cdot \mathrm{areal}(R) \leq \iint_R f(x,y)\,dA \leq M \cdot \mathrm{areal}(R).$$

- For en disjunkt forening $R = R_1 \cup R_2$,

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA.$$