Calculus 2011, Prøveeksamen 1

1a $\quad y'' - 2y' + 5y = 0$

$R^2 - 2R + 5 = 0$, $D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = -16 = (4i)^2$, $R = \frac{-(-2)\pm 4i}{2\cdot 1} = 1 \pm 2i$

Fuldstændige løsning : $y(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x)$.

$y'(x) = c_1 e^x \cos(2x) - 2c_1 e^x \sin(2x) + c_2 e^x \sin(2x) + 2c_2 e^x \cos(2x)$

$$\left.\begin{matrix} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \end{matrix}\right\}$$

$\underline{\underline{y(x) = e^x \sin(2x)}}$

1b $\quad y'' - 2y' + 5y = 2x + 3$

Gæt : $y_p(x) = Ax + B$ så $y_p'(x) = A$, $y_p''(x) = 0$.

$y_p'' - 2y_p' + 5y_p = -2A + 5(Ax + B) = \underbrace{5A}_{2}x + \underbrace{5B - 2A}_{3}$

$$\left.\begin{matrix} 5A = 2 \\ 5B - 2A = 3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5}(3 + 2A) = \frac{1}{5}(3 + 2\cdot\frac{2}{5}) = \frac{19}{25} \end{matrix}\right\}$$

Partikulær løsning : $y_p(x) = \frac{2}{5}x + \frac{19}{25}$

Fuldstændige løsning :

$\underline{\underline{y(x) = \frac{2}{5}x + \frac{19}{25} + c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x).}}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2. Ved E&P Sætning 1 s. 746 er $f^{(m)}(0) = P_3^{(m)}(0)$, $m = 0,1,2,3$.

2a $\quad P_3(x) = 6 + 2x - x^2 + 2x^3$, $\quad f(0) = P_3(0) = \underline{\underline{6}}$

2b $\quad P_3'(x) = 2 - 2x + 6x^2$, $\quad f'(0) = P_3'(0) = \underline{\underline{2}}$

2c $\quad P_3''(x) = -2 + 12x$, $\quad f''(0) = P_3''(0) = \underline{\underline{-2}}$

2d $\quad P_3'''(x) = 12$, $\quad f'''(0) = P_3'''(0) = \underline{\underline{12}}$

3. $\quad f(x,y) = 9 + y - y^2 + 2x + xy - 2xy^2$

3a $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \underline{\underline{2 + y - 2y^2}}$.

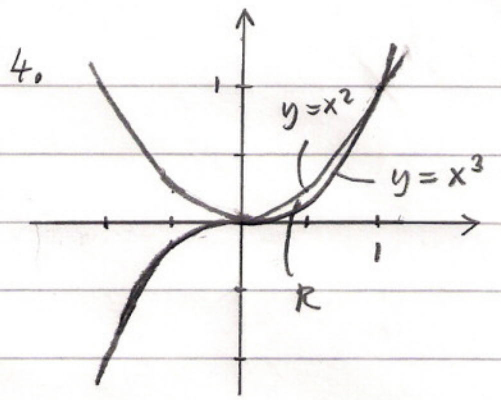
3b $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \underline{\underline{1 - 2y + x - 4xy}}$.

3c $\quad f(-1, 1) = 8$ OK , $\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2$

$z - 8 = 1\cdot(x - (-1)) + 2\cdot(y - 1) \Leftrightarrow$ (E&P side 924 formel 11)

$\underline{\underline{z - 8 = x + 1 + 2(y - 1)}}$

4.



$R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^3 \le y \le x^2\}$

Vertikal simpelt

$$\iint_R x^2\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} x^2\,dy\,dx =$$

$$\int_0^1 \left[x^2 y\right]_{y=x^3}^{y=x^2} dx = \int_0^1 (x^4 - x^5)\,dx =$$

$$\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} = \underline{\underline{\tfrac{1}{30}}}$$

5. $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0.$

$D = (-(1+i))^2 - 4\cdot 1\cdot(2+2i) = (1+i)^2 - 8 - 8i = 1^2 + i^2 + 2i - 8 - 8i = -8-6i.$

$w^2 = -8-6i$, $\alpha = -8$, $\beta = -6$, $r = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10.$

$w = \pm\left(\sqrt{\frac{10+(-8)}{2}} + i\,(-1)\sqrt{\frac{10-(-8)}{2}}\right) = \pm(1-3i)$

$z = \frac{-(-(1+i)) \pm (1-3i)}{2\cdot 1} = \frac{1+i \pm (1-3i)}{2} = \begin{cases} 1-i \\ 2i \end{cases}$

Dvs. løsningerne er $\underline{\underline{1-i}}$ og $\underline{\underline{2i}}$

6. $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 20 \iff x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 20 = 0$

Vi bruger E&P s. 969 formel (19).

$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 20.$

$F(1,1,2) = 1^2 + 3\cdot 1^2 + 4\cdot 2^2 - 20 = 0$ OK

$F_x(x,y,z) = 2x$, $F_x(1,1,2) = 2\cdot 1 = 2$

$F_y(x,y,z) = 6y$, $F_y(1,1,2) = 6\cdot 1 = 6$

$F_z(x,y,z) = 8z$, $F_z(1,1,2) = 8\cdot 2 = 16.$

$\underline{\underline{2\cdot(x-1) + 6\cdot(y-1) + 16\cdot(z-2) = 0}}$

7. $f(x,y,z) = e^{x+y} + 2z^2$

7a $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \underline{\underline{\left(e^{x+y}, e^{x+y}, 4z\right)}}$

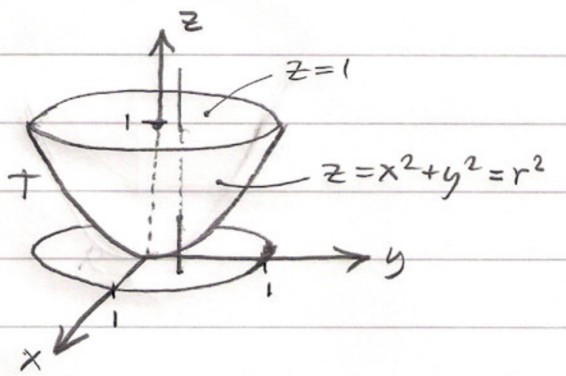
7b $P = (0,0,1)$, $\nabla f(P) = (e^{0+0}, e^{0+0}, 4\cdot 1) = (1,1,4)$

$\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (1,1,2)$, $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{(1,1,2)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$

$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P)\cdot\vec{u} = (1,1,4)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 2)$

$= \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{6}}{3}}}$

8.



T er simpel mht. cylinderkoordinater.

$\delta(x,y,z) = z^2$

8a. $m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 z^2\, r\, dz\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{3}z^3 r\right]_{z=r^2}^{z=1} dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{3}r^7\right) dr\,d\theta$

$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}r - \frac{1}{3}r^7\right) dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{24}r^8\right]_0^1 \cdot 2\pi$

$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right)\cdot 2\pi = \frac{1}{8}\cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$

8b $\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\delta(x,y,z)\,dV = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 z^3 r\,dz\,dr\,d\theta$

$= \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[\frac{1}{4}z^4 r\right]_{z=r^2}^{z=1} dr\,d\theta = \frac{1}{m}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}r - \frac{1}{4}r^9\right) dr\,d\theta$

$= \frac{2\pi}{m}\left[\frac{1}{8}r^2 - \frac{1}{40}r^{10}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{m}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{40}\right) = \frac{2\pi}{m}\cdot\frac{1}{10} = \frac{\pi}{5m} = \frac{\pi}{5\cdot\frac{\pi}{4}}$

$= \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$

Del II ("multiple choice" opgaver)

Opgave 9 (7%)

Et legeme T dækker netop det område i rummet som i sfæriske koordinater er givet ved

$$\{(\rho,\phi,\theta) : 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 4\}.$$

Massefylden for T er $\delta(x,y,z) = z$. Hvilket af nedenstående 4 itererede integraler kan benyttes til at bestemme T's masse.

☐ $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^2 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☒ $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^3 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

☐ $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \rho^2 \cos\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$

$m = \iiint_T \delta(x,y,z)\,dV = \iiint_T z\,dV$

For sfæriske koordinater har vi

$z = \rho \cos\phi$,

$dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$

så

$z\,dV = \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta.$

Grænserne på integralerne er OK

Opgave 10 (6%)

Betragt et komplekst polynomium $p(z)$ af grad 8 med *reelle koefficienter*. Antag, at $p(z)$ har en faktorisering

$$p(z) = (z-a)q(z),$$

hvor $a \in \mathbb{R}$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

☒ $q(z)$ kan *altid* faktoriseres som et produkt udelukkende bestående af reelle 1. og 2. grads polynomier

☒ $q(z)$ indeholder altid mindst én lineær reel faktor

☐ $q(z)$ kan faktoriseres udelukkende ved brug af reelle lineære faktorer

☐ Man kan ikke afgøre, om $q(z)$ har en reel rod uden at kende koefficienterne i $p(z)$.

$p(z)$ har reelle koefficienter, og kan dermed faktoriseres i reelle 1. og 2. grads polynomier. $(z-a)$, $a \in \mathbb{R}$ er en af faktorerne, og idet $p(z) = (z-a)q(z)$, ser vi at $q(z)$ også kan faktoriseres i reelle 1. og 2. grads polynomier. Da graden af $q(z)$ er 7, må der være mindst én 1. grads faktor i denne faktorisering.

Opgave 11 (6%)

Betragt en funktion $f(x,y)$ af to variable defineret på $\mathbf{R}^2$. Det oplyses at samtlige retningsafledede $D_{\mathbf{u}} f(P)$ eksisterer i punktet $P(a,b)$. Marker samtlige korrekte udsagn nedenfor.

- ☐ f er kontinuert i $P(a,b)$
- ☐ De partielle afledede f_x og f_y eksisterer i en omegn af $P(a,b)$
- ☒ De partielle afledede f_x og f_y eksisterer i $P(a,b)$
- ☒ Man kan ikke, udfra de givne oplysninger konkludere, at f er differentiabel i $P(a,b)$.

$f_x(P) = D_{\vec{i}} f(P)$ og $f_y(P) = D_{\vec{j}} f(P)$

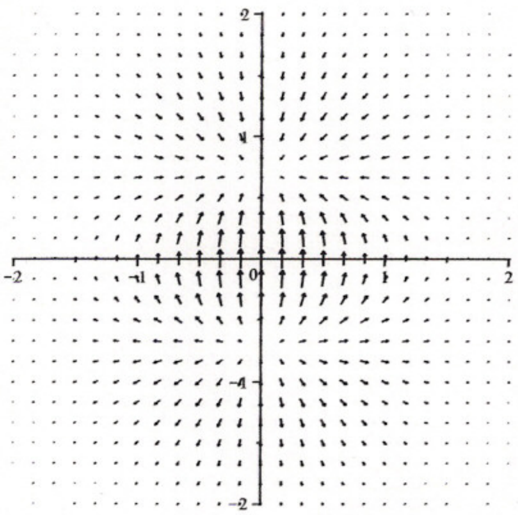
Der er ingen sætninger, som siger, at f er kontinuert i P, at f_x og f_y eksisterer i en omegn af P eller at f er differentiabel i P under de givne forudsætninger. (Modeksempler findes).

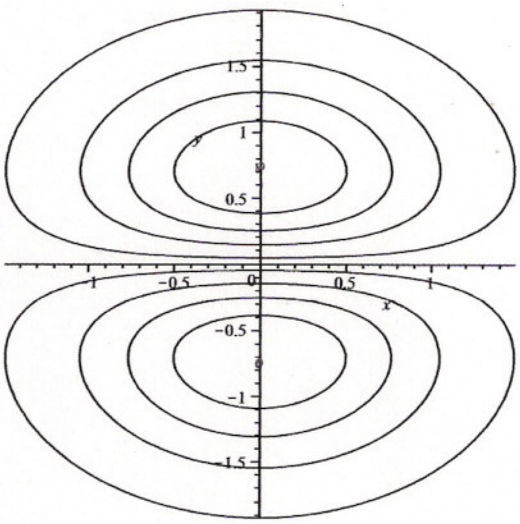
Opgave 12 (6%)

En funktion $f(x,y)$ er defineret på kvadratet

$$R = \{(x,y) : -2 \le x,y \le 2\}.$$

De to figurer nedenfor viser hhv. udvalgte gradientvektorer og niveaukurver for funktionen i dette kvadrat. Funktionen har to kritiske punkter i R, med koordinaterne $(0, \pm 1/\sqrt{2})$. Afgør ud fra plottene typen af hver af de kritiske punkter og markér svaret nedenfor.





(a) Punktet $(0, 1/\sqrt{2})$ er et

- ☒ lokalt maksimum
- ☐ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

(b) Punktet $(0, -1/\sqrt{2})$ er et

- ☐ lokalt maksimum
- ☒ lokalt minimum
- ☐ saddelpunkt.

Niveaukurverne giver lokalt maks. eller min.

Gradienten peger i den retning hvor det går stejlest opad på grafen (hvis gradienten er $\neq \vec{0}$).
E&P sætning 2 side 967.