Den retningsafledede

Definition

Givet en funktion $f(\mathbf{x})$ af n variable, og en enhedsvektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, så defineres den retningsafledede af f i retning $\mathbf{u}$ som:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{h},$$

forudsat at grænseværdien eksisterer.

Bemærk: $D_{\mathbf{i}} f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $D_{\mathbf{j}} f(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ osv.

For differentiable funktioner

Vi har formlen:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}.$$

Den retningsafledede II

Hvis θ angiver vinklen mellem $\nabla f(\mathbf{x})$ og $\mathbf{u}$, så har vi:

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = |\nabla f(\mathbf{x})||\mathbf{u}| \cos(\theta) = |\nabla f(\mathbf{x})| \cos(\theta).$$

Maksimal vækst

Det følger, at $D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x})$ er størst (f vokser hurtigst) i retningen

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}, \qquad \text{hvor } \cos(0) = 1.$$

Tilsvarende aftager f hurtigst i retningen:

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{|\nabla f(\mathbf{x})|}, \qquad \text{hvor } \cos(\pi) = -1.$$

Implicit definerede flader

Hvis (x_0, y_0, z_0) er en løsning til

$$(*) \qquad F(x, y, z) = 0,$$

hvor F er kontinuert differentiabel med $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, så kan vi betragte løsningsmængden til (*) som en (implicit defineret) flade $\mathcal{F}$.

Tangentplan

Tangentplanen til $\mathcal{F}$ i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er givet ved:

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$