FIF, ANALYSE 2

Denne liste opdateres muligvis løbende – forslag er velkomne!

Argumentér for kompakthed: Sandsynligvis "ved" vi alle sammen godt intiutivt, at funktioner som $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hhv. givet ved $f(x) = \cos(x)$ og $g(x) = e^{-x^2}\sin(x)$, både antager sine maksima og minima, et resultat, vi – jf. en af hovedsætningerne om kontinuerte funktioner fra Analyse 1 – ved gælder for alle kontinuerte, reelle funktioner på kompakte mængder. Definitionsmængden $\mathbb{R}$ er imidlertid *ikke* kompakt, så hvordan argumenterer vi så? Vi argumenterer for kompakthed!

Tilfældet f: Da f er kontinuert, ved vi, at den antager sine ekstremumsværdier på den kompakte mængde $[0, 2\pi]$. Disse ekstremumsværdier må også være globale ekstremumsværdier, da f er 2π-periodisk.

Tilfældet g: Da eksempelvis $\pm g(\pm\frac{\pi}{2}) > 0$, antager g både strengt positive og strengt negative værdier. Men $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0$, hvilket vil sige, at der eksisterer et $M > 0$, så $|x| > M$ medfører, at $|g(x)| < \frac{g(\frac{\pi}{2})}{2} = -\frac{g(-\frac{\pi}{2})}{2}$. Men $[-M, M] = \mathbb{R}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid M < |x|\}$ er en kompakt mængde, så g antager sine ekstremumsværdier på denne mængde, og da M er valgt, så $\frac{g(-\frac{\pi}{2})}{2} < g(x) < \frac{g(\frac{\pi}{2})}{2}$ for $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid M < |x|\}$, må de altså også være globale ekstremumsværdier.

Brug Horias Exercise 5 om differentialligninger for global eksistens og entydighed: Vi ved fra Horias noter, at hvis $f\colon I \times U \subset \mathbb{R}^{1+d} \to \mathbb{R}^d$ er kontinuert og opfylder en passende, lokal Lipschitz-betingelse, så har $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(t_0) = y_0 \in U$, hvor $t_0 \in I$ er et indre punkt, *lokalt* en entydig løsning. Hvis $I = \mathbb{R}$, $U = \mathbb{R}^d$ og vi er interesserede i en *global* løsning, så fortæller Exercise 5 os, at en sådan eksisterer og er entydig, såfremt Lipschitz-betingelsen gælder globalt.

Kontinuert differentiabel medfører Lipschitz: Hvis en funktion lokalt er kontinuert differentiabel, er den også lokalt Lipschitz-kontinuert. Dette følger direkte af hhv. Lemma 7.2 (for reelle funktioner) og Lemma 7.3 (for vektorfunktioner).

Brug den børnevenlige udgave af sætningen om implicit givne funktioner: Hvis "$m = 1$" kan det være nemmere at overskue, hvad sætningen om implicit givne funktioner siger, hvis man kigger på den børnevenlige udgave.

Med venlig hilsen
Morten Grud Rasmussen