Prøveeksamen, onsdag d.29 april 2015, 12:30-16:30

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka $45 - 50$ point. For et 12 tal kræves der mindst 90 point.

Opgave 1.
(i). Afgør om de følgende rækker er absolut konvergente, betinget konvergente eller divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n}{2n^2+1}.$$

(ii). Betragt potensrækken

$$f(x) := \sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^n n}{2n^2+1}.$$

Find konvergensintervallet for f. Beregn potensrækken for f' og bestem konvergensintervallet for potensrækken som definerer f'.

Opgave 2. Betragt følgen af funktioner $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $f_n : [-2,2] \mapsto \mathbb{R}$, givet af:

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{hvis } x = 0; \\ \frac{2-2\cos(xn)}{x^2n^2}, & \text{hvis } -2 \leq x < 0; \\ \frac{\sin(xn)}{xn}, & \text{hvis } 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

(i). Vis, at hver f_n er kontinuert på $[-2,2]$.
(ii). Konvergerer følgen ligeligt? Angiv en begrundelse.

Opgave 3. Lad $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ være givet af $\mathbf{h}(u,v) = u^2v - 4 + (v-1)e^{u-2}$.
(i). Vis, at $\mathbf{h}(2,1) = 0$ og $\mathbf{h} \in C^n(\mathbb{R}^2)$ for alle $n \geq 1$.
(ii). Vis, at det må eksistere en $\epsilon > 0$ lille nok og en C^1 funktion $f : (1-\epsilon, 1+\epsilon) \mapsto \mathbb{R}$ således at $f(1) = 2$ og

$$\mathbf{h}(f(v), v) = 0, \quad \forall v \in (1-\epsilon, 1+\epsilon).$$

Vis, at f er faktisk C^2.
(iii). Find $f'(1)$ og $f''(1)$.

Opgave 4. Betragt de følgende to koblede ikke-lineære differentialligninger:

$$x'(t) = -(\sin(y(t)))^2 x(t), \quad y'(t) = -(\cos(x(t)))^2 y(t), \quad x(0) = 1,\ y(0) = -1.$$

Definer $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbf{g}(x_1, x_2) = -[(\sin(x_2))^2 x_1, (\cos(x_1))^2 x_2]$, og betragt $\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) := \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Det ovenstående system kan omskrives som $\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t))$, hvor $\mathbf{z}(\cdot)$ er defineret på et åbent interval som indeholder 0 og $\mathbf{z}(0) = [1, -1]$.
(i). Vis, at $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ og at den opfylder en lokal Lipschitz betingelse.
(ii). Antag, at en løsning $\mathbf{z}(\cdot)$ kan konstrueres på intervallet $0 \leq t < T$. Bevis, at $||\mathbf{z}(t)|| \leq \sqrt{2}$ for alle $t \in [0, T)$. (Vink: vis, at funktionen $s(t) = x^2(t) + y^2(t)$ er aftagende.)
(iii, lidt sværere spørgsmål). Bevis, at $\lim_{t \nearrow T} \mathbf{z}(t)$ eksisterer og tilhører $\overline{B_{\sqrt{2}}(\mathbf{0})}$. Kan det bruges til at vise, at løsningen eksisterer for alle $t > 0$? (Vink: vis først, at hvis $0 < t_n < T$ konvergerer mod T, er følgen $\mathbf{z}(t_n)$ Cauchy og dens grænse er uafhængig af følgen t_n).