PRØVEEKSAMEN, ANALYSE 2

Der er 10 delspørgsmål i alt, hvert af dem udløser 10 point. Man består med 02 hvis man kan samle cirka 45–50 point. For et 12-tal kræves der mindst 90 point.

Der må gøres brug af bøger, noter mv. Der *må ikke* benyttes elektroniske hjælpemidler. Altså ingen lommeregner, computer osv.

Opgave 1 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2 - y^2)$.

(a) Find alle kritiske punkter for f på $\mathbb{R}^2$ og afgør, om de er hhv. maksimums-, minimums- eller saddelpunkter. Det må benyttes uden bevis, at ligningssystemet $x(x^2 - y^2 - 1) = y(x^2 - y^2 + 1) = 0$ netop har de fem løsninger $(x,y) = (0,0)$, $(x,y) = (\pm 1, 0)$ og $(x,y) = (0, \pm 1)$.

(b) Argumentér for, at $\sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ og $\inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ antages og find værdierne. Vink: Læg mærke til, at $\lim_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$.

Opgave 2 (20 POINT)

Lad $f\colon \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}^1$ være givet ved $f(t,x) = \frac{1}{e^x}$.

(a) Vis vha. abstrakte argumenter, at der (lokalt) eksisterer en entydig løsning $g_\ell\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ til begyndelsesværdiproblemet $y'(t) = f(t, y(t))$, $y(1) = 0$.

(b) Det kan vises, at den i første omgang lokalt definerede funktion g_ℓ kan udvides til en funktion $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, som opfylder differentialligningen på hele definitionsmængden, $(0,\infty)$. Lad $h\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ være givet ved $h(t) = e^{g(t)}$. Vis, at $h(t) = t$. Vink: Hvilket begyndelsesværdiproblem løser h?

Opgave 3 (30 POINT)

Lad $U = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$, $I = \mathbb{R}$, $y_0 = (0,0) \in U$, $r_0 = \frac{1}{2}$, $t_0 = 0$, $\delta_0 = 1$ og $f_1(t,(x_1,x_2)) = (2x_2 + 9t, x_1 - t)$.

(a) Funktionen f_1 opfylder en lokal Lipschitz-betingelse,

$$\|f(t,(x_1,x_2)) - f(t,(y_1,y_2))\| \leqslant L\|(x_1,x_2) - (y_1,y_2)\|, \quad t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0], \quad (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \overline{B_{r_0}}(y_0).$$

Hvad er den optimale (mindst mulige) værdi for Lipschitz-konstanten L?

(b) Med samme notation som i Theorem 6.3 i Notes for Analyse 1 and Analyse 2 af Horia Cornean, hvor f_1 spiller f's rolle, hvad er da den optimale (størst mulige) værdi for δ_1?

(c) Lad $f_2\colon \mathbb{R}^{1+2} \to \mathbb{R}^2$ være en anden funktion, som opfylder betingelserne i ovennævnte Theorem 6.3 med f_2 i f's rolle, og lad y_2 være den tilsvarende, lokale løsning, $y_2'(t) = f_2(t, y_2(t))$, $y_2(t_0) = y_0$. Lad $f_3 = \frac{1}{100} f_2$ og lad y_3 være den tilhørende, lokale løsning, $y_3'(t) = f_3(t, y_3(t)) = \frac{1}{100} f_2(t, y_3(t))$, $y_3(t_0) = y_0$. Hvad kan du sige om det indbyrdes forhold mellem definitionsmængderne for y_2 og y_3?

Opgave 4 (10 POINT)

Find Taylorrækken for $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = \frac{1}{x}$ i punktet 12 og bestem konvergensradius.

Opgave 5 (20 POINT)

(a) Gør rede for, at der eksisterer et $\delta > 0$ og en kontinuert differentiabel funktion $f\colon (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}$, så $f(0) = 0$ og $e^{f(x)} \cos(x) = \cos^2(f(x))$ for alle $x \in (-\delta,\delta)$.

(b) Find $f'(0)$.