Matematisk modellering og numeriske metoder

Vink til opgaverne relateret til lektion 5

Morten Grud Rasmussen

24. september, 2013

Afsnit 2.3

Opgave 3

- Husk, at $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
- Husk, at $D^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ blot er den anden afledede.

Opgave 7

- Bemærk, at ODE'en ikke er på standardform (der er et 9 ganget på y'')! Det er en god idé at få en vane med altid at bringe problemet på standardform, inden der regnes videre!
- Hvis det er nemmere, så foretag faktoriseringen på polynomiet $x^2 - \frac{1}{9}$. Hvis det kan skrives $x^2 - \frac{1}{9} = (x - r_1)(x - r_2)$, så er $(D^2 - \frac{1}{9}I)y = (D - r_1 I)(D - r_2 I)y$.

Afsnit 2.4

Opgave 5

- *Frekvensen* er blot $\frac{\omega_0}{2\pi}$, hvor $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
- Ang. de parallelle fjedre: Bemærk, at tegningen blot er til forvirring! Når der står "parallel" betyder det, at vi lader som om, at vi stadig kan nøjes med at betragte forskydelser i én dimension (op og ned). Hermed skal de to kræfter $-k_1 y$ og $-k_2 y$ blot adderes!

Opgave 7

- Det, de vil have, at man stiller op, er ODE'en $mL\vartheta'' = -mg\vartheta$. Herefter er det blot at gøre som ovenfor.

Afsnit 2.5

Opgave 1

- Hvis $\frac{1-a}{2}$ er en dobbeltrod, så kan Euler-Cauchy-ligningen skrives

$$y''(x) + \frac{a}{x}y'(x) + \frac{(1-a)^2}{4x^2}y(x) = 0.$$

  Hvis $m_1 \neq m_2$ er rødder, så kan Euler-Cauchy-ligningen skrives $x^2y''(x)+axy'(x)+by(x) = 0$ med $d = (1-a)^2 - 4b \neq 0$. Det er nu bare at sætte de givne udtryk ind på y's plads, og se, hvad der sker.

Opgave 5

- Husk at omskrive til standardform! Standardformen for en Euler-Cauchy-ligning er

$$x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0,$$

  og der skal altså divideres igennem med 4, inden formlerne kan bruges.

Afsnit 2.6

Opgave 3

- Wronski-determinanten skal blive på formen ae^{bx}, hvis I regner rigtigt.
- De mener, at I skal konstatere, at hvis man dividerer den ene funktion med den anden, så får man ikke en konstant.
- Kig herefter på vektorer på formen $\binom{y(x_0)}{y'(x_0)}$, vælg et x_0 (gerne et simpelt ét), og find på den måde frem til, at de to funktioner er lineært uafhængige.

Opgave 11

- Der er mange måder at løse dette på. Det vigtigste er dog, at man tænker: "Øj, det ligner godt nok løsninger til en andenordens homogen lineær ODE med konstante koefficienter" (hvilket fortegn har determinanten til karakteristiske polynomium for ODE'en i givet fald?), og så herefter bestemme disse konstante koefficienter. De to mest oplagte metoder er, at man enten bestemmer konstanterne udfra løsningsformlen (det er den mest direkte måde), eller at man bestemmer konstanterne ved at sætte funktionerne ind i

$$y'' + ay' + by = 0$$

og herefter finder de ukendte a og b.

- Se sidste vink til Opgave 3 ovenfor.
- Husk, at det pr. entydighedssætningen er nok at vise, at løsningen har den rigtige værdi og den rigtige hældning i udgangspunktet x_0 (her: $x_0 = 0$). Kalder vi de to løsninger for y_1 og y_2 skal vi altså blot finde c_1 og c_2 så $\binom{y(0)}{y'(0)} = c_1\binom{y_1(0)}{y_1'(0)} + c_2\binom{y_2(x_0)}{y_2'(x_0)}$.

Afsnit 2.7

Opgave 1

- Identificér typen af ODE! (Svar: andenordens ikke-homogen lineær ODE hvor *inputtet* r er en eksponentialfunktion).
- Konstatér, at eksponentialfunktioner er glimrende som input i de ubestemte koefficienters metode.
- Husk også at løse det tilsvarende homogene problem.

Opgave 5

- Som ovenfor, med den lille forskel, at $e^{-x}\cos(x)$ ikke er en eksponentialfunktion (men dog stadig egner sig til ubestemte koefficienter-metoden).