Matematisk modellering og numeriske metoder

Vink til opgaverne relateret til lektion 6

Morten Grud Rasmussen

25. september, 2013

Afsnit 2.8

Opgave 7

- Husk, at D blot er en forkortelse for $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.
- Man kan diskutere, om opgaven er lidt fejlplaceret idet ODE'en jo ikke er på formen $my'' + cy' + ky = F_0 \cos(\omega t)$ – for det første er det ikke $\cos$, men $\sin$, der indgår i inputtet, og for det andet står der også en konstant. Forsøg derfor ikke at løse den vha. metoderne fra dette afsnit.
- Vær opmærksom på, at ODE'en ikke er på standardform (y''-ledet bliver ganget med 4). Det er en god idé at få en vane med altid at bringe problemer på standardform, inden I gør noget som helst andet.
- Problemet kan eksempelvis løses vha. de ubestemte koefficienters metode.
- Husk at differentiere "den indre funktion" også, altså f.eks. i udtrykket $f(t) = \cos(3t)$ er $f'(t) = -3\sin(3t)$.

Opgave 11

- Når bogen taler om en *transient solution*, så mener de en generel løsning som ikke er den såkaldte *steady state* løsning. I skal altså finde løsninger på formen $y = y_p + y_h$, hvor y_h løser det tilsvarende homogene problem.
- Problemet er en oplagt kandidat til de ubestemte koefficienters metode.

- OPDATERING: Der er en vigtig regel i de ubestemte koefficienters metode, som siger, at hvis éns gæt er en løsning til det *homogene* problem, så skal man gange gættet med variablen (altså i dette tilfælde med t) og forsøge igen.
- Når en partikulær løsning er fundet vha. de ubestemte koefficienters metode, så skal det homogene problem løses. Brug her formlen for andenordens homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter som blev gennemgået i Lektion 4.

Opgave 19

- Også i denne opgave benyttes de ubestente koefficienters metode til at finde den partikulære løsning y_p.
- Find herefter den generelle løsning til det homogene problem ved at benytte formlen for andenordens homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter som ovenfor. Det giver to lineært uafhænigige løsninger y_1 og y_2, som man så tager linearkombinationen $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ af.
- Bestem nu koefficienterne c_1 og c_2 således, at $y = y_h + y_p$ opfylder begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 1$.
- Idet $y = y_h + y_p$ er $y - y_p = y_h$, og I bliver således bedt om grafisk at undersøge, hvornår den "homogene del", som er bestemt af begyndelsesbetingelserne, bliver "ligegyldig."

Opgave 25

- Igen benyttes de ubestemte koefficienters metode.
- Og igen findes den generelle løsning til det homogene problem vha. formlen for andenordens homogene ODE'er med konstante koefficienter.
- Igen bestemmes koefficienterne c_1 og c_2 udfra begyndelsesbetingelserne.
- Herefter benyttes additionsformlerne (ligning 11 på side A52 i bogen – omme bagi i appendixet) til at omskrive til den i opgaveteksten givne formel.
- På en lommeregner eller med passende software kan I nu eksperimentere med forskellige værdier af ω – det er klart sjovest, når ω er tæt på 1.

Afsnit 2.10

Opgave 5

- Ubestemte koefficienters metode giver y_p.
- Det homogene problem løses vha. halløjet med konstante koefficienter.

Opgave 7

- Her går den ikke længere! Højresiden er ikke et udtryk, der optræder i de ubestemte koefficienters metode.
- Løs først det homogene problem og benyt derefter de to lineært uafhængige løsninger som input til de arbitrære parametres variationsmetode.

Opgave 11

- ODE'en $x^2y'' - 4xy' + 6y = 21x^{-4}$ har ikke konstante koefficienter, og de ubestemte koefficienters metode virker derfor *ikke*.
- Det homogene problem er derimod en *Euler-Cauchy-ligning*, som derfor løses vha. metoderne fra Lektion 5!
- ODE'en er ikke på standardform, hvilket den skal bringes til, før vi kan benytte os af *de arbitrære parametres variationsmetode*, som vi lærte om i Lektion 6. Husk også at dividere med x^2 på højresiden!
- Den generelle løsning er nu en sum af den partikulære løsning fra de arbitrære parametres variationsmetode og den homogene løsning fra Euler-Cauchy-løsningsformlen.

Opgave 14

(a) Dét, I forventes at lære af denne øvelse er, at de ubestemte koefficienters metode er *meget* nemmere, når den kan anvendes.

(b) Her er ideen, at hvis man har en lineær – men ikke-homogen – ODE af typen

$$L(y) = r_1 + r_2,$$

hvor L er en differentialoperator (her $L = D^2 + 4D + 3I$), så kan man finde en løsning ved at finde en løsning til de to ODE'er

$$L(y) = r_1 \qquad \text{og} \qquad L(y) = r_2$$

og lægge de to løsninger sammen. Opgaven går altså ud på at konstatere, at de ubestemte koefficienters metode ikke kan anvendes på ODE'en med r_1, mens den er anvendelig på ODE'en med r_2. Derfor løses $L(y) = r_2$ vha. de ubestemte koefficienters metode, mens $L(y) = r_1$ løses vha. de arbitrære parametres variationsmetode.

(c) Denne del af opgaven er for de dygtige, ambitiøse eller særligt interesserede studerende og går ud på at løse forskellige problemer i stil med den i Opgave 11. I kan passende begynde med at skifte højresiden i ODE'en i Opgave 11 $21x^{-4}$ ud med udtryk i stil med dem fra Tabel 2.1 på side 82 i bogen og så benytte de arbitrære parametres variationsmetode til at finde løsninger. Hvis I er dygtige eller heldige, vil I så finde mønstre, og disse mønstre skal I så bruge til at formulere en "ubestemte koefficienters metode" for ikke-homogene Cauchy-Euler-ligninger, som I ideelt set derefter skal bevise er rigtig.

Afsnit 4.1

Opgave 11

- I bliver bedt om at løse ODE'en ved først at konvertere til "et system," hvilket blot betyder, at I skal anvende Theorem 1 på side 135 og omskrive andenordens ODE'en til et system af to førsteordens ODE'er.

- Dette system løses med den her matrix-egenværdi-metode, som er beskrevet f.eks. i noterne til Lektion 6.

- Herefter løses systemet med løsningsmetoden for andenordens linære homogene ODE'er med konstante koefficienter, som I efterhånden må kende til hudløshed, hvis I ellers er kommet så langt som til denne opgave på ærlig vis.