Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 12

Morten Grud Rasmussen

21. oktober, 2013

1 Partielle differentialligninger

1.1 Løsning af varmeligningen vha. Fourierrækker

[Bogens sektion 12.6 på side 558]
Vi vil nu løse den en-dimensionelle varmeligning. Principperne bag løsningsmetoden har vi allerede set den første gang, vi løste bølgeligningen, og faktisk vil der være stort sammenfald ikke blot i principperne, men også i de konkrete udregninger, grundet bølge- og varmeligningernes fællestræk. Det vil dog vise sig, at det er forskellene, der kommer til at dominere, i den forstand at løsningerne vil opføre sig fundamentalt forskelligt.

Vi begynder med at formulere det problem, vi vil løse. I første omgang formulerer vi det som et fysisk problem, og derefter modellerer vi det vha. en passende PDE med begyndelses- og randbetingelser. Det fysiske system består af en tynd metalstang eller -tråd, som er perfekt homogen, har konstant tykkelse, og er fuldstændigt isoleret, bortset fra i enderne, hvor temperaturen holdes på 0[1]. Hvis vi vælger vort koordinatsystem, så metalfætteren ligger langs x-aksen med den ene ende i $x = 0$ og den anden ende i $x = L$, så er dens temperatur til tiden 0 beskrevet ved $f(x)$ for $0 < x < L$, hvor f er en passende funktion. Det fysiske (og om lidt matematiske) problem består nu i at udregne, hvad temperaturen på et givet punkt på stangen er til en vilkårlig positiv tid. Med andre ord skal vi finde en funktion u, som opfylder, at

$$u(x, 0) = f(x) \tag{1}$$

og

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \qquad \text{for} \qquad t \geq 0, \tag{2}$$

[1] Vi vælger 0 af bekvemmelighedsårsager. Det er relativt simpelt at indse, at differentialligningen er ligeglad med konstanter, så vi kunne lige så vel have valgt temperaturen 10 – hvilken også viser, at der for metoden ikke er forskel på, om vi snakker om 0 i eksempelvis °C eller K.

og som opfører sig, som varme vil gøre. Til at håndtere sidstnævnte har vi heldigvis *varmeligningen* i én dimension

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(isoleringen og tykkelsen af stangen gør, at vi kan betragte problemet som en-dimensionelt). Vi taler om, at vi betragter varmeligningen med begyndelsesbetingelsen (1) og randbetingelsen (2). Bemærk, at vi ikke har specificeret hastighedsændringen til tid $t = 0$ i begyndelsesbetingelsen som vi gjorde det for bølgeligningen. Dette er ikke nødvendigt for varmeligningen, og er en første indikation på, at dette problem opfører sig markant anderledes end tilfældet er for bølgeligningen. Løsningsmetoden består af de samme tre trin som for bølgeligningen.

Trin 1: Separering af variable-metoden eller produktmetoden

Antag, at løsningen kan skrives på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$. Så er

$$\frac{\partial u}{\partial t} = FG' \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G.$$

Vi sætter disse udtryk ind i varmeligningen og dividerer med c^2FG og får

$$\frac{G'}{c^2G} = \frac{FG'}{c^2FG} = \frac{c^2F''G}{c^2FG} = \frac{F''}{F},$$

hvor yderste højre og yderste venstre udtryk hver især kun afhænger af t hhv. x, og de må derfor være konstante. Vi får derfor

$$F'' - kF = 0 \qquad \text{og} \qquad G' - c^2kG = 0,$$

altså to ODE'er, præcis som for bølgeligningen, med den – afgørende, skal det vise sig – forskel, at ODE'en for G kun er førsteordens.

Trin 2: Bestemmelse af løsninger, som opfylder randbetingelserne

Idet ligningen for F er identisk for bølge- og varmeligningen får vi med verbatim samme argumenter, at $k = -p^2$ skal være negativ, at $p = \frac{n\pi}{L}$ og at F derfor er givet som

$$F(x) = F_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad \text{hvor} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Med $\lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L}$ og $k = -p^2$ bliver ODE'en for G altså

$$G' + \lambda_n^2 G = 0,$$

som har løsningen

$$G_n(t) = b_n e^{-\lambda_n^2 t}, \quad \text{hvor} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og} \quad b_n \in \mathbb{R}.$$

Hvis vi altså skriver

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\lambda_n^2 t},$$

så er u_n problemets *egenfunktioner* med *egenværdier* λ_n.

Trin 3: Bestemmelse af løsninger, som også opfylder begyndelsesbetingelsen

Indtil videre har vi konstrueret løsninger som løser den endimensionelle varmeligning med randbetingelserne (2). Med mindre begyndelsesbetingelserne er helt specielle, vil vi i midlertid ikke have fundet løsninger, som opfylder (1). Ideen er igen at tage linearkombinationer af u_n'erne, så resultatet opfylder begyndelsesbetingelserne. Vi ved fra Theorem 1.5 fra Lektion 10, at vi må tage endelige linearkombinationer af løsninger og stadig have en løsning (da varmeligningen er homogent lineær). Som for bølgeligningen vil vi imidlertid forsøge os med en *uendelig* linearkombination:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \text{hvor} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}. \tag{3}$$

Begyndelsesbetingelsen lyder

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big) = f(x), \tag{4}$$

idet eksponentialfunktionerne fejes af banen af $t = 0$. Af (4) fremgår det, at b_n'erne altså skal være Fourier-koefficienterne for den ulige $2L$-periodiske udvidelse af f, og er altså givet ved

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Dette *beviser* ikke, at u givet ved ovenstående er en løsning, blot at en evt. løsning på formen (3) nødvendigvis må være givet på denne måde. Et egentligt bevis er udenfor dette kursus' afgrænsning. Vi nøjes med at konstatere, at det *kan* bevises, eksempelvis hvis f er stykkevist kontinuert og har venstre- og højreafledede overalt.

Vi bemærker, at idet $\lambda_n^2 > 0$, så vil alle løsninger nærme sig nul med eksponentiel hast. At alle løsninger nærmer sig nul kan næppe overraske; en metalfætter, som ikke bliver tilført varme, men som er fuldstændigt isoleret bortset fra i endepunkterne, hvor den holdes på nul grader, vil naturligvis gå mod en temperatur på nul overalt. En anden ting, vi bemærker, er, at jo større n, desto større λ_n^2, og dermed hurtigere konvergens mod 0. Men hvad betyder et højere n for u_n's begyndelsesværdi? Prøv at tegne situationen, og overbevis dig selv om, at større n'er naturligt må betyde, at u_n hurtigere konvergerer mod 0!

1.2 Eksempler

Vi vil nu illustrere sidste afsnits afsluttende bemærkning med et konkret eksempel.

Eksempel 1.1. For at få nogle tal, man kan forholde sig til, ud af det, antager vi, at vi ser på en 80 cm lang kobberstang, hvor de fysiske data er som følger: $\rho = 8.92$ g/cm^3, $\sigma = 0.092$ cal/(g $\cdot$ $^\circ$C) og $K = 0.95$ cal/(cm $\cdot$ s $\cdot$ $^\circ$C). Med disse tal giver $c^2 = K/(\sigma\rho) = 1.158$ cm^2/s.

Vi betragter to tilfælde. I det ene tilfælde er begyndelsesbetingelsen f_a givet

$$f_a(x) = 100\ ^\circ\text{C} \sin(\tfrac{\pi}{80\text{ cm}}x),$$

i det andet er begyndelsesbetingelsen f_b givet ved

$$f_b(x) = 100\ ^\circ\text{C} \sin(\tfrac{3\pi}{80\text{ cm}}x).$$

Vi har altså

$$b_n(f_a) = \begin{cases} 100\ ^\circ\mathrm{C} & \text{for} \quad n=1 \\ 0\ ^\circ\mathrm{C} & \text{ellers} \end{cases} \qquad \text{og} \qquad b_n(f_b) = \begin{cases} 100\ ^\circ\mathrm{C} & \text{for} \quad n=3 \\ 0\ ^\circ\mathrm{C} & \text{ellers} \end{cases}.$$

idet $\lambda_1^2 = 1.158 \cdot \pi^2/80^2\ \mathrm{s}^{-1} = 0.001785\ \mathrm{s}^{-1}$ og $\lambda_3^2 = 3^2\lambda_1^2 = 0.01607\ \mathrm{s}^{-1}$ er temperaturudviklingen i de to tilfælde altså givet ved hhv.

$$u_1(x,t) = 100\ ^\circ\mathrm{C}\sin(\tfrac{\pi}{80\ \mathrm{cm}}x)e^{-0.001785\ \mathrm{s}^{-1}t}$$

og

$$u_3(x,t) = 100\ ^\circ\mathrm{C}\sin(\tfrac{3\pi}{80\ \mathrm{cm}}x)e^{-0.01607\ \mathrm{s}^{-1}t}.$$

(Bemærk i øvrigt, hvordan enhederne for konstanterne *automatisk* kommer til at passe, hvis ellers man gør det rigtigt). Vi vil nu undersøge, hvor hurtigt maksimaltemperaturerne halveres i hhv. det ene og det andet tilfælde. Det ses let, at maksimaltemperaturerne antages i hhv. $x = 40$ cm og (eksempelvis) $x = \frac{80}{6}$ cm (hvor hhv. den ene og den anden sinus-faktor er 1), og vi skal altså blot løse

$$u_1(40\ \mathrm{cm}, t) = 100\ ^\circ\mathrm{C}e^{-0.001785\ \mathrm{s}^{-1}t} = 50\ ^\circ\mathrm{C} \qquad \text{og} \qquad u_3(\tfrac{80}{6}\ \mathrm{cm}, t) = 100\ ^\circ\mathrm{C}e^{-0.01607\ \mathrm{s}^{-1}t} = 50\ ^\circ\mathrm{C}$$

som giver hhv. $t = 388$ s $= 6.5$ min og $t = 43$ s, og andet tilfælde køler altså 9 gange så hurtigt af som det første tilfælde (hvorfor netop 9?).

Vi vil nu betragte en variant, hvor begyndelsesbetingelsen giver anledning til uendeligt mange Fourierled, modsat ovenstående, hvor der kun var brug for ét i hver situation (hhv. $(n = 1)$- og $(n = 3)$-ledet).

Eksempel 1.2. Lad f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < 40\ \mathrm{cm} \\ 80\ \mathrm{cm} - x & \text{for} \quad 40\ \mathrm{cm} < x < 80\ \mathrm{cm} \end{cases}.$$

Ved omskalering koefficienterne fra opgave 15 i afsnit 11.2, som I blev stillet som opgave til lektion 9, ser vi, at

$$b_n(f) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{320\ \mathrm{cm}}{n^2\pi^2} & \text{for} \quad n \in 4\mathbb{N} - 3 \\ -\frac{320\ \mathrm{cm}}{n^2\pi^2} & \text{for} \quad n \in 4\mathbb{N} - 1 \end{cases}.$$

Dvs.

$$u(x,t) = \frac{320\ \mathrm{cm}}{\pi^2}\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin(\tfrac{(2n-1)\pi}{80\ \mathrm{cm}}x)\exp(-(2n-1)^2\lambda_1^2 t)$$

løser problemet. Men dette viser tydeligt, at for $t > 0$ gælder det, at jo større n er, desto mindre er bidraget til summen (og jo større t, desto mindre behøver n være, før ledet bliver lille): ikke nok med, at der i hvert led indgår en faktor $\frac{1}{(2n-1)^2}$, der indgår også en faktor $\exp(-(2n-1)^2\lambda_1^2 t)$ (og sidstnævnte går klart hurtigst mod nul). Hvad betyder dette? Jo, det betyder, at så snart tiden er startet, vil udtrykket hurtigt domineres af – og dermed være relativt velbeskrevet ved – nogle få, langsomtsvingende sinus-kurver med $(n = 1)$-ledet $\frac{320\ \mathrm{cm}}{\pi^2}\sin(\frac{\pi}{80\ \mathrm{cm}}x)\exp(-\lambda_1^2 t)$ som det klart vigtigste. Med andre ord vil selv denne meget skarpe fordeling af varmen i udgangspunktet meget hurtigt blive glat og rund og ligne en sinus-kurve. Se i øvrigt figur 295 på side 652 i bogen.

1.3 Nye randbetingelser: isolerede endepunkter

Vi vil nu se på, hvad der sker, hvis man ikke fastholder endepunkterne af metalstangen på en bestemt temperatur, men i stedet isolerer dem, så de ikke kan afgive (eller optage) varme. Antagelse 3 fra lektion 11 var, at varmestrømningen var proportional med gradienten af temperaturen. I vores endimensionelle setup svarer gradienter til partielle x-afledede, og isolerede endepunkter svarer til, at varmestrømningen er 0. Med andre ord betyder isoleringen, at vi i stedet for $u(0,t) = u(L,t) = 0$ har randbetingelsen

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0. \tag{5}$$

Anvendes produktmetoden nu igen ($u(x,t) = F(x)G(t)$ og $F'(0) = F'(L) = 0$), så når man i stedet frem til, at F skal være af typen

$$F(x) = F_n(x) = \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)$$

(evt. ganget med en konstant), således at egenfunktionerne i stedet bliver

$$u_n(x,t) = a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t} \quad \text{for} \quad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

altså inkl. $n = 0$*!* Vi ser altså, at problemet har 0 som egenværdi med $f \equiv a_0$ (en vilkårlig konstant funktion) som tilhørende egenfunktion, og vi ser, at vi for at løse begyndelsesværdiproblemer nu i stedet skal anvende Fourierrækker for *lige* funktioner (cosinus-udviklinger) i stedet for *ulige* funktioner (sinus-udviklinger). Løsninger er derfor på formen

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big)e^{-\lambda_n^2 t}, \qquad \text{hvor} \qquad \lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

og

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{samt} \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\Big(\frac{n\pi}{L}x\Big).$$

Det ses, at alle led – undtagen ($n = 0$)-ledet som er konstant lig a_0, som er begyndelsesværdiens gennemsnitsværdi – går mod nul med eksponentiel hastighed. Forklar dette udfra intuitive betragtninger!

1.4 Tidsuafhængige varmeledningsproblemer – Laplace-ligningen

Antag, at en varmestrømning er i balance i den forstand, at den ikke ændrer sig over tid. Så er $u_t = 0$ og i to dimensioner ser varmeligningen pludselig således ud:

$$0 = c^2\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) \qquad \text{eller blot} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0,$$

som vi genkender som Laplace-ligningen, vi kort stiftede bekendtskab med i lektion 10. Begyndelsesbetingelsen bortfalder (naturligvis?) i dette tilfælde, og vi står tilbage med et randbetingelsesproblem, som kan være af tre forskellige typer.

Definition 1.3 (Randbetingelser for Laplace-ligningen)**.** Randbetingelser for Laplace-ligningen inddeles i følgende tre typer.
Dirichlet-randbetingelser (eller randbetingelser af første type) er betingelser, hvor u er angivet på randen.
Neumann-randbetingelser (eller randbetingelser af anden type) er betingelser, hvor $\nabla u \cdot n$ er angivet på randen, hvor n er en vektor, som står vinkelret på randen.
Robin-randebetingelser (eller randbetingelser af tredje type) er betingelser, hvor u er angivet på en del af randen, mens $\nabla u \cdot n$ er angivet på resten af randen.

Eksempel 1.4. Vi illustrerer nu Dirichlet-problemet for den todimensionelle Laplace-ligning. Lad $R = [0,a]\times[0,b]$, så randen S består af de fire linjestykker i rummet $L_1 = \{0\}\times[0,b]$, $L_2 = [0,a]\times\{b\}$, $L_3 = \{a\} \times [0,b]$ og $L_4 = [0,a] \times \{0\}$, $S = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$. Antag, at

$$u(0,y) = 0 \quad \text{på } L_1, \quad u(x,b) = f(x) \quad \text{på } L_2, \quad u(a,y) = 0 \quad \text{på } L_3 \quad \text{og} \quad u(x,0) = 0 \quad \text{på } L_4.$$

Igen anvendes produktmetoden, hvor vi antager, at $u(x,y) = F(x)G(y)$. Dette giver ved lidt arbejde og anvendelse af randbetingelserne på L_1, L_3 og L_4

$$F(x) = F_n(x) = \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) \qquad \text{og} \qquad G(y) = G_n(y) = a_n \sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big)$$

(bemærk, at den ene er en sinus hyperbolsk!) og dermed egenfunktionerne

$$u_n(x,y) = a_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big),$$

som vi summer sammen til

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\sinh\Big(\frac{n\pi}{a}y\Big).$$

Randbetingelserne på L_2 giver derfor at

$$u(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty}\bigg(a_n \sinh\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big)\bigg)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big) = f(x).$$

For at dette kan være opfyldt, må $a_n \sinh(\frac{n\pi b}{a})$ være lig Fourier-koefficienterne for f tolket som en *ulige* $2a$-periodisk funktion (da det er sinus-rækken, de indgår i). Altså

$$a_n \sinh\Big(\frac{n\pi b}{a}\Big) = b_n(f) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,\mathrm{d}x$$

eller

$$a_n = \frac{b_n(f)}{\sinh(\frac{n\pi b}{a})} = \frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f(x)\sin\Big(\frac{n\pi}{a}x\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Vi har igen ikke *bevist*, at dette er en løsning, men dette kan vises, eksempelvis hvis f og f' er kontinuerte, og f'' er stykkevist kontinuert.

Vi bemærker afslutningsvist, at også den tidsuafhængige bølgeligning reducerer til Laplace-ligningen, ligesom flere andre naturlige, fysiske problemer gør i det tidsuafhængige tilfælde. Eksempelvis vil også en stillestående sæbehinde være beskrevet af Laplace-ligningen.