

Matematisk modellering og numeriske metoder

Overskrifter

Morten Grud Rasmussen

25. november, 2013

Lektion 1

Ordinære differentialligninger

ODE'er – helt grundlæggende

Løsninger

Begyndelsesværdiproblemer

Geometrisk fortolkning af $y'(x) = f(x, y(x))$

Retningsfelter og linjeelementer

Eulers metode

Separable ODE'er

Separering af de variable

Nogle eksempler

Reduktion til separabel form

Lektion 2

Laplace-transformationer

Definitionen af Laplace-transformationen

Linearitet af Laplace-transformationen

Laplace-transformationen af polynomier

At erstatte s med $s - a$ i transformationen

Eksistens og entydighed

Laplace-transformationen og ODE'er

Laplace-transformationen af afledte

Laplace-transformationen af integralet af en funktion

Laplace-transformationen som et værktøj til at løse IVP'er

Lektion 3

Eksakte ODE'er og integrerende faktorer

Hvad er eksakte ODE'er for nogle?

Integrerende faktorer

Lineære ODE'er

De grundlæggende definitioner

Bernoulli-ligningen

Populationsdynamik

Eksistens og entydighed af løsninger

Lektion 4

Homogene andenordens lineære ODE'er

Linearitetsprincippet

IVP'er for andenordens homogene lineære ODE'er

Reduktion af orden

Homogene lineære ODE'er med konstante koefficienter

Problemet i en nøddeskal

Positiv diskriminant: $a^2 - 4b > 0$ og dermed to rødder

Diskriminanten er 0: $a^2 - 4b = 0$ og dermed én dobbeltrod

Negativ diskriminant: $a^2 - 4b < 0$ og ingen reelle rødder

Opsummering

Differentialoperatorer

Differentialligninger i et abstrakt setup

Oscillationer i et masse-fjeder-system

Det udæmpede system

Det samme – men med dæmpning

Lektion 5

Euler-Cauchy-ligninger

De tre typer af Euler-Cauchy-ligninger

Eksistens og entydighed samt konsekvenser heraf

Eksistens og entydighed af andenordens homogene lineære ODE'er

Andenordens ikke-homogene lineære ODE'er

Generelle og partikulære løsninger

Stabilitet af løsinger for ODE'er med konstante koefficienter

De ubestemte koefficienters metode

Lektion 6

Forcerede oscillationer

Et forstyrret masse-fjeder-system

Udæmpede, forcerede oscillationer samt resonans

Dæmpede, forcerede oscillationer

En generelt løsningsformel for andenordens ikke-homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficienter og input

De arbitrære parametres variationsmetode

System af ODE'er

Et eksempel på et "naturligt" system af ODE'er

Konvertering af en n 'te-ordens ODE til et system af n ODE'er

Lektion 7

Divergence of a vector field

Definition and properties of divergence

Curl of a vector field

Definition and basic properties of the curl

Lektion 8

Fourier series

Periodic functions

Orthogonality of the trigonometric system

A concrete example

Convergence of the Fourier series

Lektion 9

Fourier series

Changing periods in connection with Fourier series

Simplifications for even and odd functions

Half range expansions

Lektion 10

Partial differential equations

The basics of PDE's

Derivation of the wave equation

Solution of the wave equation

Lektion 11

Partielle differentiaalligninger

D'Alemberts løsning af bølgeligningen

Karakteristikmetoden

Udledning af varmeligningen

Lektion 12

Partielle differentiaalligninger

Løsning af varmeligningen vha. Fourierrækker

Eksempler

Nye randbetingelser: isolerede endepunkter

Tidsuafhængige varmeligningsproblemer – Laplace-ligningen

Lektion 13

Numeriske metoder til løsning af differentialligninger

Bevarelseslove

Numeriske overvejelser – punktvis repræsentation

Finite difference-metoden

Lektion 14

Numeriske overvejelser – elementvis repræsentation

Finite element-metoden

Numeriske overvejelser – bevarelseslove og voluminer

Finite volume-metoden

Lektion 15

Numerisk analyse

Grundlæggende numerik

At løse ligninger vha. iterationer

Lektion 16

Interpolation

Interpolationspolynomier

Lagrange-interpolation

Newtons generelle divideret differens-metode

Newtons *forward difference*-formel

Newtons *backward difference*-formel

Lektion 17

Numerisk integration og differentiation

Grundlæggende om numerisk integration

Midtpunktsreglen

Trapezreglen

Simpsons regel

Præcisionsgrad

Fejlvurderinger i Simpsons regel

Gauss-kvadratur

Adaptiv numerisk integration

Eksempler

Numerisk differentiation

Lektion 18

Numeriske metoder til førsteordens ODE'er

Euler-metoden

Adaptiv skridtlængde

Heuns metode

Runge-Kutta-metoder

Fejlestimering i RK4

Runge-Kutta-Fehlberg

Baglæns Euler-metode

Eksempler

Lektion 19

Mangeskridtsmetoder til løsning af førsteordens ODE'er

Adams-Bashforth-metoder

Adams-Moulton-metoder

Eksempel

Metoder til førsteordenssystemer og højereordens ODE'er

Repetition af systemer af ODE'er

Euler-metoden

Runge-Kutta-metoder

Runge-Kutta-Nyström-metoder

Eksempler

Baglæns Euler for systemer

Lektion 20

Numerisk metode til Laplace- og Poisson-ligningerne

Finite difference-formulering af problemet

Dirichlet-randbetingelser

Gauss-Seidel-iterationsmetoden

Neumann- og blandede randbetingelser

Irregulær rand