

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 1

Morten Grud Rasmussen

9. september 2014

Opgave 1

Løs følgende differentialligninger efter bedste evne:

1. $y' + 2 \sin(2\pi x) = 0$

2. $y' = y$

Opgave 2

Et objekt i frit¹ fald udsættes for en konstant acceleration, $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, kaldet tyngdeaccelerationen. Opstil en ODE for $y(t)$, den tilbagelagte distance siden $t = 0$, af et fritfaldende objekt til tiden t . Vis, at hvis objektet til tiden $t = 0$ er i hvile, dvs. $y'(0) = 0$, så er løsningen

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2.$$

Opgave 3

Newtons anden lov siger, at massen gange accelerationen af et objekt er lig med summen af kræfterne, som påvirker objektet. Tyngdekraften er massen gange tyngdeaccelerationen. Antag, at luftmodstanden er proportional med kvadratet² af hastigheden y' .

1. Opstil en ODE for hastigheden af et objekt med massen m , som udsættes for tyngdekraften og luftmodstand.
2. Vælg en passende værdi for m og proportionalitetskonstanten. Med disse valg skal du nu tegne et retningsfelt for ODE'en.
3. Antag, at $y'(0) = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Skitsér løsningen. Hvilken hastighed går løsningen mod, når t går mod ∞ ? Hvordan ville tingene se ud, hvis luftmodstanden blot var proportional med y' ?

¹helt frit – heller ingen luftmodstand

²dette betyder, at man sætter i anden potens

Opgave 4

Find den generelle løsning til $y(x)y'(x) + 36x = 0$. Tjek efter ved at indsætte din løsning i ligningen.

Opgave 5

Benyt noternes Eksempel 3.2 til at udregne, hvor stor en andel af den oprindelige $^{14}_6\text{C}$, der bør være tilbage i et træ, som antages at være afgået ved døden for 3000 år siden.

Opgave 6

Gompertzmodellen er en ODE, som beskriver vækst i en tumor som funktion af tid og er givet ved $y'(t) = -Ay(t) \ln(y(t))$, hvor $A > 0$ og $y(t)$ er størrelsen af tumoren til tiden t . Betragt modellen og diskutér vækst, skrumpning og stilstand for tumorer. Løs ODE'en.