Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 1

Morten Grud Rasmussen

4. september, 2013

1 Ordinære differentialligninger – ODE'er

1.1 ODE'er – helt grundlæggende

Definition 1.1 (Ordinære differentialligninger)**.** En ordinær differentialligning – forkortet ODE (fra eng.: Ordinary Differential Equation) – er en ligning, som indeholder én eller flere afledede af en ukendt funktion af én uafhængig variabel.

Vi vil typisk kalde den ukendte funktion y og den uafhængige variabel x eller t, hvor sidstnævnte typisk vil være i situationer, hvor vi tænker på y som en model for noget tidsafhængigt.

Eksempel 1.2. Hvis vi kalder den uafhængige variabel for x, så er de følgende tre ligninger eksempler på ODE'er:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(x)\,, \\ y''(x) + 9y(x) &= e^{-2x}, \\ y'(x)y'''(x) - \frac{3}{2}y'(x)^2 &= 0\,, \end{aligned}$$

hvor, som sædvanligt, $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$, $y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ osv.

Betegnelsen *ordinær* dækker over, at den ukendte funktion y er en funktion af én variabel, i kontrast til såkaldte *partielle differentialligninger* (PDE'er), som indeholder ukendte funktioner af flere variable, og hvor der derfor naturligt indgår partielt afledede, et emne, vi vil vende tilbage til i Lektion 10.

Det er naturligt at klassificere ODE'er efter deres *orden*:

Definition 1.3 (Ordenen af en ODE)**.** En ODE er af orden n såfremt den n'te afledede af den ukendte funktion er dén afledede af højest grad, som indgår i ODE'en.

I dagens lektion vil vi udelukkende fokusere på førsteordens-ODE'er. Alle førsteordens-ODE'er kan omskrives til følgende form:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0\,, \tag{1}$$

for et passende valg af F. En anden form, som ofte optræder, er:

$$y'(x) = f(x, y(x))\,.$$

Sidstnævnte form kaldes den *eksplicitte form*, mens (1) kaldes den *implicitte form*. Det er altid muligt at omskrive en eksplicit form til en implicit form:

$$y'(x) = f(x, y(x)) \Leftrightarrow y'(x) - f(x, y(x)) = 0\,,$$

m.a.o. kan vi blot sætte $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Ofte er det også muligt at gå fra en implicit form til en eksplicit, eksempelvis kan vi for $x \neq 0$ omskrive:

$$x^{-3}y'(x) - 4y(x)^2 = 0$$

til

$$y'(x) = 4x^3y(x)^2.$$

1.2 Løsninger

Definition 1.4 (Løsning til en førsteordens-ODE)**.** En funktion h kaldes en *løsning* til en given ODE (1) på et åbent interval $I = (a, b)$ hvis h er defineret og differentiabel på I og $F(x, h(x), h'(x)) = 0$ for alle x i I. I givet fald kaldes grafen for h for en *løsningskurve*.

Vi minder om, at $(a, b) = \{x\colon a < x < b\}$ og at a kan være et reelt tal eller $-\infty$ mens b kan være et reelt tal eller ∞.

Eksempel 1.5. Vi skal eftervise, at funktionen y givet ved $y(x) = \frac{c}{x}$, hvor c er en arbitrær konstant, er en løsning til ODE'en $xy'(x) = -y(x)$ for alle $x \neq 0$. Dette gøres ved at sætte ind i formlen. Først bemærker vi, at

$$y'(x) = -\frac{c}{x^2}.$$

Dvs.

$$xy'(x) = -x\frac{c}{x^2} = -\frac{c}{x} = -y(x)$$

for alle $x \neq 0$.

Eksempel 1.6. Betragt ODE'en $y'(x) = \cos(x)$. Vi vil nu finde en løsning ved at integrere på begge sider:

$$y(x) + k = \int y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c\,.$$

hvor k og c er to arbitrære integrationskonstanter, som vi samler i én: $\tilde{c} = c - k$. Påstanden er nu, at $y(x) = \sin(x) + \tilde{c}$ er en løsning for alle valg af $\tilde{c}$:

$$y'(x) = \sin'(x) + 0 = \cos(x).$$

Da $y = y_{\tilde{c}}$ er en løsning for alle valg af konstanten $\tilde{c}$, taler vi om en *familie af løsninger*.

1.3 Begyndelsesværdiproblemer – "IVP's"

Eksistensen af familier af løsninger til ODE'er peger på, at vores ODE har været *underdetermineret*. I Eksempel 1.6 kunne vi skrive den *generelle løsning* som $y(x) = \sin(x) + \tilde{c}$ (ordet "den", altså bestemt form, vil senere blive begrundet), og for et bestemt valg af $\tilde{c}$, eksempelvis $\tilde{c} = 1$, kalder vi $y(x) = \sin(x) + 1$ en *partikulær* løsning. Hvis man har en partikulær løsning, kan man naturligvis præcisere hvilke værdier den antager for bestemte x-værdier. Tænker man på den uafhængige variabel som tid, så kan man eksempelvis spørge hvilken værdi, en løsning har til tid 0. Dette leder hen til næste definition, hvis navn kan begrundes ud fra det netop tænkte eksempel:

Definition 1.7 (Begyndelsesværdiproblem)**.** Et *begyndelsesværdiproblem*, forkortet IVP, er en ODE med en tilknyttet *begyndelsesværdibetingelse* (IC) $y(x_0) = y_0$, hvor x_0 og y_0 er givne konstanter.

En eksplicit ODE med IC kan således skrives på følgende måde:

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0 \,.$$

Eksempel 1.8. Løs IVP'et

$$y'(x) = 3y(x), \qquad y(0) = 5.7 \,.$$

Den generelle løsning er $y(x) = ce^{3x}$, og da vi skal have, at $y(0) = ce^{3 \cdot 0} = c = 5.7$, så er løsningen til IVP'et altså $y(x) = 5.7e^{3x}$.

2 Geometrisk fortolkning af $y'(x) = f(x, y(x))$

2.1 Retningsfelter og linjeelementer

En førsteordens-ODE $y'(x) = f(x, y)$ har en simpel geometrisk fortolkning. Da $y'(x)$ er hældningen af y i punktet x, så vil en løsning, som går gennem punktet (x_0, y_0), altså oplagt have hældningen $f(x_0, y_0)$ i dette punkt. Dette betyder, at selvom vi ikke nødvendigvis kan give et funktionsudtryk for en løsning, så kan vi godt udtale os om en løsnings lokale egenskaber. Ofte kan man sågar få en idé om, hvilke klasser af løsninger, man kan forvente, en given ODE har, samt få et indtryk af deres generelle opførsel, ved at undersøge ODE'en grafisk. Metoden er, at man tegner såkaldte *linjeelementer*, som er små linjestykker i planen med en hældning, som, hvis linjestykket er centreret om punktet (x_0, y_0), er givet ved $f(x_0, y_0)$. Fig. 7 på side 9 i bogen illustrerer metoden med eksemplet $y'(x) = y(x) + x$.

2.2 Eulers metode

Det er ofte praktisk – og af og til eneste mulighed – at løse et ODE-problem numerisk. Den måske simpleste metode for eksplicitte førsteordens-ODE'er er Eulers metode, som går ud på at udnytte den ovenfornævnte geometriske fortolkning. Mere konkret, så ved vi, at da løsningen pr. antagelse er differentiabel, så er forskellen

$$y(x_0 + h) - y(x_0) + hy'(x_0)$$

lille, hvis h er lille. Altså

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hf(x_0, y_0)$$

og dermed kan vi approksimere værdien af en løsning gennem (x_0, y_0) i en serie af punkter $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots$ ved følgen

$$\begin{aligned}
y_0 &= y_0 \\
y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\
y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\
&\dots \\
y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Problemet med denne metode er, at fejlene akkumulerer. Vi vil senere finde meget bedre numeriske metoder til dette problem.

3 Separable ODE'er

3.1 Separering af de variable

I nogle tilfælde kan en førsteordens-ODE omskrives til formen

$$g(y(x))y'(x) = f(x).$$

Når en sådan omskrivning har fundet sted, taler man om, at der er foregået en *separering af de variable*, idet højresiden kun afhænger af x, og venstresidens afhængighed af x kun optræder via y og y', hhv. En separabel ODE er ofte nem at løse, idet integration på begge sider ved substitution giver:

$$\int g(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + k\,,$$

såfremt f og g er integrable, hvilket de f.eks. er, hvis de er kontinuerte. Håbet er nu, at y kan isoleres.

3.2 Nogle eksempler

Eksempel 3.1. ODE'en $y'(x) = 1 + y(x)^2$ er separabel, fordi den kan omskrives til

$$g(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{1 + y(x)^2} = 1 = f(x),$$

hvor $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ og $f(x) = 1$. Integration på begge sider giver nu

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = \arctan y(x) + k = x + c = \int 1\,\mathrm{d}x$$

og derfor $y(x) = \tan(x + \tilde{c})$, hvor igen $\tilde{c} = c - k$. *BEMÆRK: Det er essentielt, at $\tilde{c}$'et introduceres på det rigtige tidspunkt!*

Eksempel 3.2 (Kulstof-14-metoden)**.** Som bekendt kan radioaktivt henfald beskrives ved ODE'en $y'(t) = ky(t)$. Vi får oplyst, at Ötzi indeholder et ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$-til-${}^{12}_{6}\mathrm{C}$-forhold på 52.5% af det, man finder i levende organismer. Da dette forhold i atmosfæren er (tilnærmelsesvist) konstant, så kan man, hvis man kender halveringstiden for ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ – det gør vi, den er $H = 5715$ år – finde ud af, ca. hvornår Ötzi holdt op med at udveksle kulstofatomer med omgivelserne, hvilket også går under betegnelsen *døde*.

Først løses den generelle ligning:

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k \quad \Rightarrow \quad \ln|y(t)| = kt + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 e^{kt}, \quad \text{hvor } y_0 = e^c.$$

Nu findes k:

$$y_0 e^{kH} = 0.5 y_0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\ln(0.5)}{H} = -0.0001213\,.$$

(Kunne vi have gættet fortegnet på k?) Endelig findes den tid, der er passeret, siden Don Ö døde:

$$y_0 e^{kt} = y_0 \cdot 0.525 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(0.525)}{-0.0001213} = 5312\,.$$

(Kunne vi have gættet, at det var lidt mindre end halveringstiden?)

3.3 Reduktion til separabel form

Visse ikke-separable ODE'er kan omformuleres i separabel form ved at introducere en alternativ ukendt funktion i stedet y. Vi gennemgår her et simpelt, men vigtigt eksempel:

$$y'(x) = f\Big(\frac{y(x)}{x}\Big), \tag{2}$$

hvor f er en differentiabel funktion. Sæt nu $u(x) = \frac{y}{x}$. Da er

$$y(x) = u(x)x \quad \text{og} \quad y'(x) = u'(x)x + u(x).$$

Hvis vi sætter ind i (2) fås

$$u'(x)x + u(x) = f(u(x)) \quad \text{eller} \quad u'(x)x = f(u(x)) - u(x)$$

som, hvis $f(u(x)) - u(x) \neq 0$, kan separeres:

$$\frac{u'(x)}{f(u(x)) - u(x)} = \frac{1}{x}.$$

Et gennemregnet eksempel kan findes i bogen på side 18.