Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 6

Morten Grud Rasmussen

24. september, 2013

1 Forcerede oscillationer

[Bogens afsnit 2.8, side 85]

1.1 Et forstyrret masse-fjeder-system

I udledningen af masse-fjeder-systemets ODE antog vi, at der ikke var nogen "ydre kræfter." Hvis nu fjederen ikke er spændt fast i et solidt loft, men der i stedet står en eller anden lurendrejer og bevæger den normalt fastspændte del af fjederen op og ned i en jævn bevægelse, så kommer der en ydre kraft med i modellen, et *input*, som vi tidligere har benævnt det, og vores ODE ophører med at være homogen. I stedet får vi den ikke-homogene ODE

$$my'' + cy' + ky = r,$$

hvor r er inputtet. Da systemet uden input er et oscillerende system, er det naturligt at fokusere på følgende specielle valg af r:

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = F_0 \cos(\omega t), \tag{1}$$

hvor F_0 og ω – ligesom m og k – er positive reelle tal (mens c i udgangspunktet blot er ikke-negativ).

Man kan ved hjælp af de ubestemte koefficienters metode vise, at y_p givet ved

$$y_p(t) = a \cos(\omega t) + b \cos(\omega t)$$

er en partikulær løsning, såfremt

$$a = F_0 \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2} \qquad \text{og} \qquad b = F_0 \frac{\omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \tag{2}$$

hvor $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Jf. sidste lektion kan enhver løsning dermed skrives på formen

$$y = y_p + y_h,$$

hvor y_h er en løsning til den homogene ODE

$$my'' + cy' + ky = 0.$$

Som sagt er kravet på c blot, at den er ikke-negativ – $c = 0$ svarer som bekendt til et udæmpet system, mens $c > 0$ svarer til et dæmpet. Vi vil nu se på de to tilfælde hver for sig.

1.2 Udæmpede, forcerede oscillationer samt resonans

Hvis $c = 0$, så fremgår det af (2), at vi skal til at overveje tingene lidt nøjere, såfremt $\omega_0 = \omega$. Antag derfor i første omgang, at $\omega_0 \neq \omega$. Da vil (2) reducere til

$$a = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{F_0}{k\big(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\big)} \qquad \text{og} \qquad b = 0,$$

hvor vi kommer fra den ene repræsentation af a til den anden ved at bruge, at $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Hermed er

$$y_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t),$$

og henter vi den homogene løsning ind fra lektion 4, så får vi den generelle løsning til at være:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) + C \cos(\omega_0 t - \delta),$$

altså *en sum af to harmoniske oscillationer med forskellig frekvens!* Nok så vigtigt, så ser vi, at amplituden i første oscillation (dén fra y_p) er $\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$, som altså vokser ubegrænset, når ω nærmer sig ω_0. Tager man amplituden af inputtet F_0, fjederkonstanten k og massen m ud af billedet, så ender man med tallet

$$\rho = \frac{k}{F_0}\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2},$$

som kaldes *resonansfaktoren*. Hvis vi vælger $C = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$ og $\delta = 0$, så kan vi bruge de trigonometriske additionsformler til at vise, at

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\big(\tfrac{\omega_0+\omega}{2}t\big) \sin\big(\tfrac{\omega_0-\omega}{2}t\big).$$

Hvis ω således nærmer sig ω_0, så bliver $\omega_0 - \omega$ lille, og sidste sinus-funktion bliver langsomtsvingende, mens $\omega_0 + \omega$ forbliver i størrelsesordenen $2\omega_0$. Det er det samme, som den interferens, man lytter efter, når man stemmer sin guitar (eller sit klaver, hvis man er til den slags).

Vi vil nu se på, hvad der sker, hvis $\omega = \omega_0$. Ud fra ovenstående kunne man få den tanke, at der ikke længere er en øvre grænse for løsningens udsving. Vi opskriver ODE'en:

$$y''(t) + \omega_0^2 y(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)).$$

Dette er en oplagt kandidat til de ubestemte koefficienters metode, men idet $\cos(\omega_0 t)$ og $\sin(\omega_0 t)$ begge løser den homogene ODE, så skal vi altså gange med t:

$$y_p(t) = t(a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)).$$

Regner vi på det, får vi, at $a = 0$ og $b = \frac{F_0}{2m\omega_0}$. En partikulær løsning er derfor

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin(\omega_0 t),$$

som tydeligvis oscillerer vildere og vildere pga. faktoren t. Dette kaldes *resonans*, et begreb, som er rigt illustreret på YouTube (søg eksempelvis på "resonance bridge" – derfor skal ingeniører lære matematik).

1.3 Dæmpede, forcerede oscillationer

Som vi husker fra lektion 4, så har det karakteristiske polynomium for det homogene system negativ realdel, eller sagt på en anden måde, alle løsninger konvergerer mod 0, hvilket betyder, at ODE'en (1) er *stabil* i den forstand, vi indførte i sidste lektion. Det betyder blot, at alle løsninger konvergerer mod den samme partikulære løsning, som altså kan skrives på formen

$$y_p(t) = C\cos(\omega t - \delta) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}}\cos(\omega t - \delta),$$

hvor $\tan(\delta) = \frac{\omega c}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$. Det kan vises, at amplituden C antager sin maksimale værdi som funktion af ω, når $\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$, såfremt højresiden er ikke-negativ, hvilket er tilfældet, når $c^2 \leq 2mk$ (se også noterne fra lektion 4). Sætter vi dette valg af ω ind, så får vi følgende værdi af C:

$$C = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}, \qquad (\omega^2 = \omega_0^2 - \tfrac{c^2}{2m^2}).$$

2 En generel løsningsformel for andenordens ikke-homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficienter og input

[Bogens afsnit 2.10, side 99]

2.1 De arbitrære parametres variationsmetode

Vi vil nu se på en generel løsningsformel for andenordens ikke-homogene lineære ODE'er med kontinuerte koefficienter og kontinuert input, dvs.

$$y'' + py' + qy = r, \tag{3}$$

hvor p, q og r er kontinuerte på et åbent interval I, hvor vi ønsker at finde en løsning.

Advarsel: Denne metode kan resultere i svære integraler! Såfremt en anden metode kan anvendes (eksempelvis de ubestemte koefficienters metode), vil denne ofte være nemmere i praksis! Metodens styrke er naturligvis, at den (i hvert fald teoretisk) virker i alle situationer og dermed udgør et konstruktivt bevis for, at sådanne ODE'er altid har én løsning, og dermed et todimensionelt løsningsrum, jf. lektion 5.

Vi begynder med at betragte den homogene pendant til (3) på standardform, altså ODE'en

$$y'' + py' + qy = 0,$$

og kalder to uafhængige løsninger til denne for y_1 og y_2 (husk, at vi fra lektion 4 har en generel løsningsformel i tilfældet, hvor p og q er konstante, mens vi fra lektion 5 har en generel løsningsformel i tilfældet, hvor ODE'en er en Euler-Cauchy-ligning, altså $p(x) = \frac{a}{x}$, $q(x) = \frac{b}{x^2}$, hvor vi husker, at Euler-Cauchy-ligningen først skal bringes på standardform).

Fra lektion 5 ved vi, at $W = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$ overalt. Hermed er følgende veldefineret:

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1(x)r(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

og ydermere viser det sig, at y_p defineret på denne måde er en løsning til (3)! Nu kommer et par kommentarer.

Som I ser, så svarer de to integraler lidt til funktionen u i metoden reduktion af orden, idet der også dér var tale om, at man tog en løsning og gangede med en variabel funktion. Havde ovenstående ubestemte integraler således været konstante (lad os kalde disse konstanter hhv. $-c_1$ og c_2), så ville $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$ og altså løse det homogene system. Vi ser nu, at vi ved at "variere parametrene" har fundet en løsning til det *ikke*-homogene problem.

Kommentar nr. to har sikkert større interesse for jer, idet den handler om en praktisk faldgruppe. Som det fremgår af (4), så indgår er et par x'er i formuleringen af løsningen. Det er dog *uhyre vigtigt* at holde sig for øje, at disse variable er såkaldt *dummy-variable*, idet de ingen betydning har uden for deres respektive integraler, og dermed kan omdøbes efter forgodtbefindende! De har *intet* med den frie variabel at gøre! Vi kan således omskrive (4) til

$$y_p(x) = -y_1(x) \int_a^x \frac{y_2(t)r(t)}{W(t)}\,\mathrm{d}t + y_2(x) \int_b^x \frac{y_1(s)r(s)}{W(s)}\,\mathrm{d}s,$$

hvor a og b bestemmer integrationskonstanterne. Indtil man har styr på metoden, er det faktisk anbefalelsesværdigt at gøre dette, så man ikke forveksler de mange variable.

At løsningsformlen er rigtig, kan verificeres ved inspektion. Udregn blot

$$y_p'' + py_p' + qy_p$$

og konstatér, at udtrykket er lig r. Advarsel: Tungen skal holdes lige i munden! Alternativt kan man følge udledningen i bogen side 100–102. Jeg vil anbefale, at I tror på formlen som den står, men dog altid tjekker jeres resultater efter ved inspektion. På den måde får I tjekket, om I har regnet rigtigt og et sådant tjek gør det strengt taget også ud for et bevis i jeres konkrete tilfælde!

3 Systemer af ODE'er

[Bogens afsnit 4.1, side 130]

3.1 Et eksempel på et "naturligt" system af ODE'er

Antag, at vi har to tanke, T_1 og T_2, som hver indeholder 100 volumenenheder vand. I tank T_1 er vandet rent til tid 0, mens 150 masseenheder gødning er opløst i T_2. De to tanke er under konstant omrøring, så vi kan antage, at deres indhold er uniformt. To rør forbinder tankene, og gennem dem cirkulerer 2 volumenenheder pr. tidsenhed hhv. den ene og den anden vej. Vi skal nu finde ud af, hvor hurtigt der er mindst halvt så meget gødning i T_1 som i T_2.

Lad derfor y_1 betegne mængden af gødning i T_1 til en given tid, mens y_2 betegner mængden af gødning i T_2. Først konstaterer vi, at der er tale om differentialligninger: vi kender ændringen pr. tid, ikke værdien pr. tid. Den øjeblikkelige ændring er jo forskellen på, hvor meget der flyder ind og hvor meget, der flyder ud. Altså:

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{2}{100}y_2 - \frac{2}{100}y_1 \quad \text{og} \\ y_2' &= \frac{2}{100}y_1 - \frac{2}{100}y_2, \end{aligned}$$

idet $\frac{2\,[\text{volumenenheder pr. tidsenhed}]}{100\,[\text{volumenenheder}]} = \frac{1}{50}$ [pr. tidsenhed] er andelen, der flyder fra den ene tank til den anden pr. tidsenhed, mens y_1 og y_2 som sagt er mængden i de enkelte tanke, hvilket betyder at produktet $\frac{1}{50}y_1$ [mængdeenhed pr. tidsenhed] eksempelvis er mængden, som flyder fra T_1 til T_2 pr. tidsenhed. Skriver vi nu $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)$, så er systemet altså beskrevet ved

$$y' = Ay \qquad \text{hvor} \qquad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{50} & \frac{1}{50} \\ \frac{1}{50} & -\frac{1}{50} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Hvis nu A i stedet var en diagonalmatrix,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

så ville de to systemer ikke forstyrre hinanden, og vi ville i realiteten blot have

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda_1 y_1 \\ y_2' &= \lambda_2 y_2, \end{aligned}$$

som har løsningerne $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$ og $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Bemærk dog, at λ_1 og λ_2 i dette tilfælde er *egenværdierne* for A, og at *egenvektorerne* for a er $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ og $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, så løsningen har formen $x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}$ og $x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}$. Vi gætter derfor på, at det generelt gælder, at $x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$, hvor v_i er egenvektor for A med tilhørende egenværdi λ_i, er en løsning til $y' = Ay$. Vi tjekker efter:

$$x_i'(t) = (v_i e^{\lambda_i t})' = \lambda_i v_i e^{\lambda_i t} = A v_i e^{\lambda_i t} = A x_i(t),$$

hvoraf det kan ses, at det faktisk er tilfældet. For matricen A i (5) finder vi egenværdier og egenvektorer til at være $\lambda_1 = 0$ og $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ samt $\lambda_2 = -\frac{1}{25}$ og $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Den generelle løsning til (5) er derfor

$$y(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{25}t}.$$

Hvis vi til tiden $t = 0$ har $y(0) = \binom{y_1(0)}{y_2(0)} = \binom{0}{150} = c_1\binom{1}{1} + c_2\binom{1}{-1}$, så må $c_1 = 75$ og $c_2 = -75$. Løsningen på vores IVP er altså

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 75 - 75e^{-\frac{1}{25}t} \\ y_2(t) &= 75 + 75e^{-\frac{1}{25}t}. \end{aligned}$$

Vi skulle finde t_0, så $y_1(t_0) = \frac{1}{2}y_2(t_0)$. Da $y_1 + y_2 \equiv 150$ (der fordamper ikke gødning!) så betyder det, at $y_1(t_0) = 50$ og dermed at $t_0 = \frac{\log(3)}{\frac{1}{25}} = 25\log(3) \simeq 27.5$, og vi skal altså lade blandingen foregå i ca. 30 tidsenheder.

3.2 Konvertering af en n'te-ordens ODE til et system af n ODE'er

I afsnittet før så vi på et "naturligt" system af ODE'er. Hvad er så et "unaturligt" (som vel må eksistere qua den ovenforbenyttede distinktion)? Tja, man kan vel diskutere, hvor unaturligt, det er, men idéen er, at man tager en almindelig n'te-ordens ODE og laver den om til et system, hvor man ikke nødvendigvis kan tolke de enkelte ODE'er som andet end sådan noget som "hastigheden" og "accelerationen." Metoden fremgår af nedenstående sætning, som på det nærmeste er indelysende.

Sætning 3.1. *Antag, at vi har en n'te-ordens ODE på formen*

$$y^{(n)}(t) = F(t, y'(t), y''(t), \dots, y^{(n-1)}(t)). \tag{6}$$

Dette system er da ækvivalent med følgende system af n ODE'er:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\cdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= F(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{7}$$

via identifikationen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \cdots \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

For illustration omskriver vi nu masse-fjeder-systemet fra lektion 4 til et system af førsteordens ODE'er. Først skal vi bringe problemet på samme form som (6):

$$my'' + cy' + y = 0 \qquad \text{omskrives altså til} \qquad y'' = -\frac{c}{m}y' - \frac{k}{m}y.$$

Hermed er masse-fjeder-systemet beskrevet på formen (6) såfremt vi sætter $F(t, y, z) = -\frac{c}{m}z - \frac{k}{m}y$. Vi kan nu sætte $y_1 = y$ og $y_2 = y'$ og skrive masse-fjeder-systemet på formen (7):

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= F(t, y_1, y_2) = -\frac{c}{m}y_2 - \frac{k}{m}y_1. \end{aligned}$$

Matricen for systemet er således

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix}$$

og systemet kan nu løses ved at finde egenværdier og egenvektorer for A og benytte metoderne fra foregående afsnit.