Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 7

Morten Grud Rasmussen

25. september 2014

1 Divergens af et vektorfelt

[Sektion 9.8 og 10.7 i bogen, s. 403]

1.1 Definition af og og egenskaber for divergens

Lad $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ være en 3-dimensionel vektorfunktion med kontinuerte partielt afledede, som afhænger af de kartesiske koordinater x, y og z, og eventuelt af en tidsparameter. Det betyder, at

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \text{og} \quad \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

eksisterer og er kontinuerte funktioner. Man kan tænke på v som eksempelvis hastigheden af luftstrømningen til et fast tidspunkt. De partielt afledede er så et mål for ændringen i hastighed i hver af retningerne x, y, and z, ikke som funktion af tiden, men som funktion af positionen!

Forestil dig nu, at det beskrevne system er spærret inde i et langt, tyndt rør, som ligger langs x-aksen. Antag, at der er en bevægelse langs x-aksen i positiv retning. Hvis $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ er negativ, så vil hastigheden langs x-aksen aftage, efterhånden som man bevæger sig langs x-aksen i positiv retning. Hvis denne tendens holder hele vejen langs x-aksen, så er den "indkommende fart" større end den "udgående fart" langs x-aksen!

På den anden side, hvis $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ er negativ, men vi i stedet har en bevægelse i den negative retning, så vil den *numeriske værdi* af hastigheden i x-retningen faktisk *stige* ($\frac{\partial v_1}{\partial x} < 0$ så der er en negativ hældning, men værdien var negative, så den bliver blot endnu mere negativ), efterhånden som du bevæger dig langs x-aksen i positiv retning. Igen betyder det, at den "indkommende fart" er større end den "udgående fart" langs x-aksen, blot har den indkommende og den udgående retning skiftet plads!

Vi konkluderer at hvis $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ er negativ, så er den "indkommende fart" større end den "udgående fart", i hvert fald i x-retningen, ligegyldigt om den generelle bevægelse er fra den ene eller den anden retning. Hvis $\frac{\partial v_1}{\partial x} > 0$, gælder det modsatte oplagt. Hvis den "indkommende fart" er større end den "udgående fart" langs en given akse, så må én (eller en kombination) af følgende to ting ske: enten bliver det indkommende presset sammen, eller også undslipper det i en anden retning end den givne akses.

Hvis røret nu er virkeligt tyndt, så kunne man forvente, at kun bevægelsen i x-aksens retning tæller, så her kan de to muligheder tolkes som følgende: enten er der et hul i røret, hvor luften kan slippe ud (et "afløb") eller også bliver luften presset sammen inde i røret. Hvis vi havde betragtet det omvendte tilfælde, $\frac{\partial v_1}{\partial x} > 0$, så skulle konklusionerne vendes om: enten er der et hul i røret, hvor luften siver ind (en "kilde"), eller også fortyndes luften i røret.

Vi har nu oparbejdet en intuition om, hvad $\frac{\partial v_1}{\partial x}$ fortæller os om et vektorfelt, menlig at det måler forskellen på *tilstrømningen* og *udstrømningen* i x-retningen. Det skulle derfor ikke komme som en overraskelse, at skalarfeltet $\operatorname{div} v$ defineret nedenfor kan tolkes som *forskellen på den totale tilstrømning og den totale udstrømning*.

Definition 1.1 (Divergens)**.** Lad v være et vektorfelt, som afhænger af de kartesiske koordinater x, y og z. Så er *divergensen* $\operatorname{div} v$ af v skalarfeltet defineret ved

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Vi bemærker følgende vigtige sætning:

Sætning 1.2 (Theorem 1 på side 403 i bogen)**.** *Divergensen* div *er uafhængig af valget af kartesiske koordinater.*

Vi vil ikke bevise sætningen, men bemærker, at det er fuldstændigt forventeligt udfra vores tolkning af divergensen som forskellen på den totale tilstrømning og den totale udstrømning.

I den motiverende diskussion ovenfor blev et hul i røret betragtet som et "*afløb*" eller en "*kilde*," afhængig af bevægelsens retning gennem hullet. Citationstegnene skyldes, at divergensen i det fulde 3-dimensionelle billede også ville gøre rede for en strømning gennem et sådant hul, hvilket ville reflektere det faktum, at der ikke ville blive skabt eller annihileret partikler; de ville blot bevæge sig ind eller ud af røret. Ikke desto mindre findes der realistiske modeller, hvor afløb/kilde-opførsel indgår på en helt naturlig måde. Et simpelt eksempel kunne være en model, som beskriver damp – fordampet vand – ovenover et vandreservoir. I en sådan model kan vand fordampe og damp kondensere. Dette svarer netop til at have *afløb* og *kilder* – denne gang uden citationstegn.

Det følgende eksempel udforsker situationen, hvor der ikke er afløb eller kilder, men det beskrevne fluidum[1] er kompressibelt.

Eksempel 1.3 (Sådan circa eksempel 2 på side 404 i bogen)**.** Vi har allerede etableret, at divergensen div måler forskellen mellem den totale tilstrømning og den totale udstrømning i et givet punkt. Lad v være hastighedsvektoren for et kompressibelt fluidum (eksempelvis luft) og ρ er dets densitet. Her er både v og ρ funktioner af tid og sted. Så er ρv – densitet gange hastighed – et udtryk for hvor meget og i hvilken retning fluidummet bevæger sig pr. tidsenhed i et givet punkt til et givet tidspunkt. Hvis vi ikke har afløb eller kilder, så har vi *massebevarelse*. Dette betyder, at den eneste måde, hvorpå forskellen på total tilstrømning og total udstrømning kan være

[1] "fluidum" er en fællesbetegnelse for stoffer i gas- eller flydende fase

forskellig fra nul, er, hvis densiteten ændres. Mere præcist haves

$$\operatorname{div}(\rho v) - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1}$$

Denne ligning kaldes *massebevarelsesbetingelsen*. I en konstant strømning, dvs. en strømning, som ikke afhænger af tiden, så reduceres (1) til

$$\operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

Hvis fluidummet er inkompressibelt (som f.eks. vand og mange andre væsker er), så reduceres (1) til

$$\operatorname{div}(v) = 0.$$

Dette kaldes *inkompressibilitetsbetingelsen*.

Vi bemærker, at divergensen af gradienten af et skalarfelt f er Laplace-operatoren anvendt på f:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = \nabla^2 f, \tag{2}$$

hvor grad er givet ved

$$\operatorname{grad} v = \nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix},$$

og Laplace-operatoren er givet ved

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Identiteten (2) følger let fra en direkte udregning.

Vi slutter af med en vigtig integrationssætning.

Sætning 1.4 (Gauss' divergenssætning – Theorem 1 i bogen på side 453)**.** *Lad T være en lukket, begrænset delmængde i $\mathbb{R}^3$ med en overflade S som er orienterbar (dvs. at man meningsfyldt kan tale om yder- og inderside), stykkevist glat (dvs. at S kan deles op i endeligt mange dele $S = \cup_i S_i$ hvorpå den ydre normalvektor af længde 1 $n\colon S_i \to \mathbb{R}^3$ er kontinuert). Lad F være en vektorfunktion som har kontinuerte partielt afledede i et domæne som indeholder T. Så er*

$$\iiint_T \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V = \iint_S F \cdot n \,\mathrm{d}A.$$

Denne sætning laver et rumligt integral om til et overfladeintegral. Dette er fuldstændigt parallelt med det mere velkendte

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a) = -1 \cdot f(a) + 1 \cdot f(b).$$

Her spiller divergensen blot rollen som differentialet, prikproduktet med normalvektoren svarer til fortegnet og endepunkterne gør det ud for overfladen – sidstnævnte betyder selvfølgelig, at vi i stedet for et integral blot har en sum.

2 Rotationen af et vektorfelt

[Afsnit 9.9 i bogen, s. 406]

2.1 Definition af og grundlæggende egenskaber ved rotationen af et vektorfelt

Vi begynder igen med en lille motiverende diskussion. Forestil dig, at du har et eller andet objekt, som roterer med konstant vinkelhastighed $\omega > 0$ i tre dimensioner. Vælg et højrehåndet kartesisk koordinatsystem med z som rotationsakse (aksen hvorom objektet roterer) og således, at hvis du ser i z's positive retning, så går rotationen i urets retning – x- og y-akserne må så være vinkelrette på z-aksen og på hinanden, således at x, y og z udgør et højrehåndet koordinatsystem.

Da rotationen er konstant, kan den beskrives ved et vektorfelt, som er konstant – i tid, ikke i rum! Hvis vi fokuserer på en del af objektet som er forholdsvist langt fra z-aksen, så vil hastigheden være forholdsvist stor (tænk på vindmøller; jo større vinger, desto større fart har spidsen af vingerne). Lad os udlede hastighedsvektorfeltet. Lad p_0 være et punkt i rummet, som vi antager, objektet dækker til tiden $t = 0$. For passende valg af r og δ kan vi skrive koordinaterne for p_0 på følgende måde:

$$p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\delta) \\ r\sin(\delta) \\ z \end{pmatrix}.$$

Da objektet roterer med vinkelhastigheden ω, så kan vi parametrisere banen for det punkt på objektet, som til tid $t = 0$ er i p_0 ved

$$p(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t + \delta) \\ r\sin(\omega t + \delta) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

hvor t er tiden og ω er vinkelhastigheden af rotationen. Da p beskriver *positionen* af punktet på objektet til en given tid, så må $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ være *hastighedsvektorfeltet*:

$$v_p(t) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\omega t + \delta) \\ \omega r\cos(\omega t + \delta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y(t) \\ \omega x(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hvis vi evaluerer dette vektorfelt til tiden 0, så får vi hastighedsvektorfeltet i punktet p_0 til tiden 0, men da rotationshastigheden er antaget konstant, er dette rent faktisk værdien af den konstante hastighed i dette givne punkt:

$$v_p(0) = v_{p_0} = \begin{pmatrix} -\omega r\sin(\delta) \\ \omega r\cos(\delta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega y_0 \\ \omega x_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da p_0 var vilkårligt valgt, ved vi nu, hvordan hastighedsvektorfeltet ser ud generelt, og vi kan droppe 0'erne:

$$v(p) = \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at alt dette er bestemt ud fra tre ting: vinkelhastigheden, rotationsretningen og rotationsaksen. Da rotationsaksen bestemte vores valg af z-akse, rotationsretningen angav den positive retning for z-aksen og $\omega > 0$ angav vinkelhastigheden, kunne den samme information være indkodet i en vektor, hvis retning angiver rotationsakse og -retning, og hvis længde angiver vinkelhastigheden:

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}.$$

Bemærk, at samme vektor dukker op, hvis vi udregner følgende:

$$\nabla \times v(p) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1(p) & v_2(p) & v_3(p) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3(p)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(p)}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1(p)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(p)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2(p)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(p)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\omega \end{pmatrix}$$

og dividerer med 2. Her er

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v(p) = \begin{pmatrix} v_1(p) \\ v_2(p) \\ v_3(p) \end{pmatrix},$$

og notationen $|A|$ betyder determinanten af matricen A. Pointen er nu, at denne formel *altid* giver en vektor, hvis retning angiver rotationsakse og -retning, og hvis længde angiver 2 gange rotationshastigheden, hvis $v(p)$ angiver hastighedsvektorfeltet for et roterende objekt, ligegyldigt hvad rotationasken og -retningen samt vinkelhastigheden er, og uafhængigt af koordinatsystem, så længe det er højrehåndet og kartesisk. Dette leder til følgende definition:

Definition 2.1 (Rotation)**.** Lad $v = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right)$ være en differentiabel vektorfunktion af de kartesiske koordinater x, y og z. Så kaldes

$$\operatorname{curl} v = \operatorname{rot} v = \nabla \times v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1(p) & v_2(p) & v_3(p) \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3(p)}{\partial y} - \frac{\partial v_2(p)}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1(p)}{\partial z} - \frac{\partial v_3(p)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2(p)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(p)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

for *rotationen* af vektorfeltet v.

Diskussionen ovenfor definitionen opsummeres i følgende sætning:

Sætning 2.2 (Sætning 1 på side 407 i bogen)**.** *Retningen af rotationen af hastighedsvektorfeltet* $\operatorname{rot} v$ *for et roterende, stift legeme angiver rotationsretning og -akse, mens længden af vektoren* $\operatorname{rot} v$ *er lig* 2 *gange vinkelhastigheden.*

Vi påstod i diskussionen også følgende sætning:

Sætning 2.3 (Sætning 3 på side 408 i bogen)**.** *Rotationen af et vektorfelt afhænger ikke af valget af højrehåndet, kartesisk koordinatsystem.*

Tolkningen af rotationen leder til følgende definition:

Definition 2.4 (Ikke-roterethed)**.** Et vektorfelt v kaldes *ikke-roterende*, hvis dets rotation, $\operatorname{curl} v$, er identisk lig 0.

Direkte udregninger giver følgende sætning:

Sætning 2.5. *Gradientfelter er ikke-roterende, dvs. hvis f har kontinuerte andenordensafledede, så er*

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}(f)) = 0.$$

Ydermere gælder, at hvis v er et vektorfelt med kontinuerte andenordensafledede, så er divergensen af rotationen 0:

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}(v)) = 0.$$

Ligesom divergensen havde Gauss' divergenssætning, så har rotationen Stokes' sætning, som angiver, hvordan et kurveintegral langs en lukket kurve kan omskrives til et fladeintegral over en flade, som ligger indenfor denne kurve.

Sætning 2.6 (Stokes' sætning)**.** *Lad S være en stykkevist glat, orienteret overflade i rummet og lad kanten af S være en stykkevist glat, simpel, lukket kurve C. Lad $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en kontinuert differentiabel vektorfunktion. Så er*

$$\iint_S (\operatorname{curl} F) \cdot n \,\mathrm{d}A = \oint_C F \cdot r'(s) \,\mathrm{d}s,$$

hvor n er som i Sætning 1.4 og r er en parametrisering af kurven C, som opfylder, at r' har konstant længde 1 og at S ligger til venstre, når man følger r rundt.

Til slut nævner vi Greens sætning, som kan vises vha. Stokes' sætning.

Sætning 2.7 (Greens sætning)**.** *Lad R være en lukket, begrænset mængde i planen, hvis kant består af endeligt mange glatte kurver. Lad $F = (F_1, F_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være kontinuert differentiabel. Så er*

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \oint_C F \cdot r'(s) \,\mathrm{d}s,$$

med r som i Stokes' sætning.