Matematisk modellering og numeriske metoder

Lektion 8

Morten Grud Rasmussen

29. september 2014

1 Fourierrækker

[Afsnit 11.1 i bogen, s. 474]

1.1 Periodiske funktioner

Definition 1.1 (Periodiske funktioner). *En periodisk funktion* f er en funktion f med en *periode* p, dvs. et tal $p > 0$ således at

$$f(x) = f(x + p)$$

for alle x i f's domæne, som skal udgøre alle eller næsten alle tal.

Hvis $f(x) = f(x+p)$ så er også $f(x) = f(x+p) = f((x+p)+p) = f(x+2p)$ og per indkuktion fås

$$f(x) = f(x + np) \qquad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

hvor $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ er mængden af hele tal. Specielt har vi, at hvis f har perioden p, så er den også perioden np for alle $n \in \mathbb{N}$. Det mindste, positive tal p, som er en periode for f kaldes f's *fundamentalperiode*. Vi bemærker, at hvis to funktioner f og g begge er periodiske med periode p, så er også $af + bg$ periodisk med periode p for alle reelle tal a og b. Dvs. mængden af periodiske funktioner med perioden p er lukket under linearkombinationer og udgør derfor et vektorrum.

Det sidste udsagn i definitionen af periodiske funktioner, nemlig at f's domæne skal udgøre *næsten alle* reelle tal, er (trods den tilsyneladende løse formulering) et fuldstændig præcist matematisk udsagn, hvis definition bygger på en hel masse avanceret teori. For vores formål er det dog nok at vide, at hvis den exceptionelle mængde, dvs. mængden af reelle tal, som ikke ligger i domænet for f, er *tællelig*, så udgør domænet næsten alle reelle tal. Med andre ord, hvis f er ikke-defineret i et endeligt (eller sågar tælleligt) antal punkter i intervallet $[0, p]$ og ellers opfylder, at $f(x + p) = f(x)$, så er f defineret næsten overalt på hele $\mathbb{R}$.

Vi kender allerede nogle funktioner, som er periodiske, eksempelvis $\cos$, $\sin$, $\tan$ og $\cot$. Her er $\tan$ og $\cot$ eksempler på funktioner, som er defineret næsten overalt, men ikke overalt: $\tan$ er ikke-defineret i $n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, og $\cot$ er ikke-defineret i $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Alle fire er periodiske med periode 2π (omend to af dem har en mindre *fundamental periode* – hvilke? og hvad er deres fundamentalperioder?). Vi bemærker, at periodiske funktioner med periode p kan bruges til at konstruere funktioner med en hvilken som helst periode, fordi hvis f har periode p, så kan vi for ethvert $a > 0$ definere f_a ved

$$f_a(x) = f(\tfrac{x}{a}),$$

som har periode ap:

$$f_a(x + ap) = f(\tfrac{x+ap}{a}) = f(\tfrac{x}{a} + p) = f(\tfrac{x}{a}) = f_a(x).$$

Dette betyder, at vi i første omgang kan kan koncentrere os om 2π-periodiske funktioner uden at gå glip af noget fundamentalt. Det viser også, at funktionerne

$$x \mapsto \sin(nx) \qquad \text{og} \qquad x \mapsto \cos(nx), \qquad \text{hvor} \qquad n \in \mathbb{N},$$

har perioderne $\frac{2\pi}{n}$, og specielt, pr. (1), har de også perioden 2π. Dvs. linearkombinationer af funktioner på formen $\cos(nx)$ og $\sin(nx)$ er også 2π-periodiske. En sidste funktion, vi får brug for, som også er 2π-periodisk (ja, faktisk periodisk med en hvilken som helst periode), er den konstante funktion $f \equiv 1$. Kyler man disse funktioner ned i én stor potte, går de nemlig under følgende betegnelse.

Definition 1.2 (Trigonometrisk system)**.** Funktionerne

$$1, \qquad \cos(x), \qquad \sin(x), \qquad \cos(2x), \qquad \sin(2x), \qquad \cos(3x), \qquad \ldots$$

udgør det *trigonometriske system*.

1.2 Ortogonalitet af det trigonometriske system

Vi vil om lidt se, at vi kan skrive (stort set) alle "naturlige" 2π-periodiske funktioner som en "uendelig linearkombination" af det trigonometriske system. En sådan "uendelig linearkombination" kaldes en "trigonometrisk række" og skrives

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \cdots. \tag{2}$$

Først bemærker vi dog, at vi (oplagt) kan skrive et hvilket som helst element fra det trigonometriske system som en sådan række (ved at vælge alle *koefficienter* $a_n = b_n = 0$, undtagen koefficienten foran det ønskede element, som selvfølgelig bør være 1).

Tænk på det trigonometriske system som en ortogonalbasis for et vektorrum. Hvis vi er i $\mathbb{R}^n$ og vektorerne v_i, $i = 1, \ldots, n$ udgør en ortogonalbasis, så kan enhver vektor v skrives som en linearkombination af disse v_i'er:

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \qquad \text{hvor} \qquad a_i = \frac{v \cdot v_i}{\|v_i\|^2}$$

Hvis vi specielt sætter $v = v_j$, så får vi

$$v = v_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{v_j \cdot v_i}{\|v_i\|^2} v_i = 0 + \cdots + 0 + \frac{v_j \cdot v_j}{\|v_j\|^2} v_j + 0 + \cdots + 0 = \frac{\|v_j\|^2}{\|v_j\|^2} v_j = v_j. \tag{3}$$

For at kunne gøre noget tilsvarende i vektorrummet bestående af 2π-periodiske funktioner, skal vi bruge en erstatning for prikproduktet, som har lignende egenskaber. Vigtigst af alt, så bør vi være i stand til at genskabe koefficienterne $a_n = b_n = 0$ undtagen det 1-tal, som står foran det udvalgte element i det trigonometriske system, i analogi med (3).

Det viser sig, at den korrekte erstatning for prikproduktet er det følgende[1]

$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Da $\|v\|^2 = v \cdot v$, og $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) \, \mathrm{d}x = \pi$ og $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx) \, \mathrm{d}x = \pi$, er vores koefficienter nu:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x, \tag{4a}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x, \qquad \text{og} \tag{4b}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x. \tag{4c}$$

Denne definition opfylder netop, at hvis f tilhører det trigonometriske system, så er $a_n = b_n = 0$ for alle n undtagen for koefficienten 1 foran f selv, i fuldstændig analogi med (3).

For at verificere dette, skal vi blot bemærke, at hvis f er i det trigonometriske system, så er a_0 givet ved (4a) forskellig fra 0 hvis og kun hvis $f \equiv 1$, og hvis $f \equiv 1$, så er $a_0 = 1$, og tilsvarende for a_n og b_n: $a_n = 1$ hvis $f(x) = \cos(nx)$, $a_n = 0$ ellers, og $b_n = 1$ hvis $f(x) = \sin(nx)$, $b_n = 0$ ellers. (Tjek selv efter ved at indsætte $f(x) = 1$, $f(x) = \cos(mx)$ og $f(x) = \sin(mx)$ i de tre udtryk og se, hvad der sker, hvis $m = n$ og hvis $m \neq n$).

Definition 1.3 (Ortogonalitet)**.** To 2π-periodiske funktioner f, g kaldes *ortogonale*, hvis

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Elementerne i det trigonometriske system er altså ortogonale.

Definition 1.4 (Fourierkoefficienter, Fourierrække, partialsum)**.** Lad f være en 2π-periodisk funktion. Hvis koefficienterne a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$ er givet ved (4), så kaldes de for f's Fourierkoefficienter, og den tilhørende trigonometriske række (2) for *Fourierrækken* for f. Hvis man kun medtager endeligt mange led i summen (2), kaldes dette en *partialsum*.

Det var måske ikke nogen overraskelse, at f kunne skrives som en trigonometrisk række i tilfældet, hvor f var i det trigonometriske system eller at der var simple formler for at finde koefficienterne i dette tilfælde. Vi vil nu forsøge at gøre det samme med en noget anderledes funktion end dem, der optræder i det trigonometriske system.

[1]Hvis vi vil inkludere komplekse funktioner, skal definitionen tilpasses en smule.

1.3 Et konkret eksempel

Vi vil nu lade f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{for } -\pi < x < 0 \\ k & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi).$$

Bemærk, at dette definerer f som en funktion næsten overalt på $\mathbb{R}$: Først angives værdien af f på $[-\pi, \pi]$ (undtagen i den endelige mængde $\{-\pi, 0, \pi\}$), og så får vi at vide, at f er periodisk med periode 2π, som præcis er længden af $[-\pi, \pi]$, så for ethvert x, som ikke kan skrives som $n\pi$ for et heltal $n \in \mathbb{Z}$, kan vi finde et $m \in \mathbb{Z}$ sådan at $x + m2\pi \in [-\pi, \pi]$ og så må $f(x)$ være lig med $f(x + m2\pi)$ pga. periodiciteten.

Funktionen f tilhører åbenbart ikke det trigonometriske system: Den er diskontinuert i $n\pi$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, mens alle elementer i det trigonometriske system er kontinuerte overalt. Vi vil nu se, hvad der sker, hvis vi forsøger at skrive f som en trigonometrisk række ved hjælp af koefficienterne, som fås ved at benytte proceduren i (4).

Først finder vi a_0:

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-k)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k\,\mathrm{d}x \right) = 0$$

Dernæst finder vi a_n:

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-k) \cos(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k \cos(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-k \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=-\pi}^{0} + \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

Og til sidst finder vi b_n:

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-k) \sin(nx)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} k \sin(nx)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(k \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{x=-\pi}^{0} - \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{\pi} \right) \\ &= \frac{k}{n\pi} (\cos(0) - \cos(-n\pi) - \cos(n\pi) + \cos(0)) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \\ &= \frac{2k}{n\pi} (1 - (-1)^n), \end{aligned}$$

så $b_1 = \frac{4k}{\pi}$, $b_2 = 0$, $b_3 = \frac{4k}{3\pi}$, $b_4 = 0$, $b_5 = \frac{4k}{5\pi}$, osv. Dette betyer at Fourierrækken er

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \cdots \right).$$

Denne række konvergerer faktisk mod f. Hvad der præcist menes med dette nævnes ikke i bogen og faktisk findes der forskellige former for konvergens, som alle er opfyldt i dette tilfælde. I dette kursus vil vi dog nøjes med at konstatere, at vi har punktvis konvergens på f's domæne, dvs. for hvert x, hvor f er defineret, er

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)x).$$

Specielt er $f(\frac{\pi}{2}) = k = \frac{4k}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots)$, hvilket medfører, at

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots,$$

som er et ikke-trivielt resultat. Vi vil nu se på, hvornår Fourierrækken konvergerer punktvist (og mod hvad).

1.4 Konvergens af Fourierrækken

Før vi formulerer hovedresultatet i dette afsnit, som giver betingelser, som er tilstrækkelige for punktvis konvergens, og som er opfyldt i de fleste praktiske anvendelser, er vi nødt til at definere et par begreber.

Definition 1.5 (grænseværdi fra venstre og fra højre)**.** Lad f være en funktion som er defineret i en omegn til venstre for x_0. Hvis grænseværdien

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \uparrow 0} f(x_0 + h)$$

eksisterer, hvor $h \uparrow 0$ betyder, at grænsen er taget gennem negative tal ("mod nul nedefra"), så kaldes $f(x_0 - 0)$ *grænseværdien fra venstre* af f i x_0. Tilsvarende, hvis f er defineret i en omegn til højre for x_0 og hvis

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \downarrow 0} f(x_0 + h)$$

eksisterer, hvor $h \downarrow 0$ betyder at grænsen er taget gennem positive tal, så kaldes $f(x_0 + 0)$ *grænseværdien fra højre* af f i x_0.

Selvfølgelig er notationen $f(x_0 \pm 0)$ en smule uheldig, da det i forvejen betyder $f(x_0)$ (idet $x_0 \pm 0 = x_0$), men normalt giver det ikke anledning til problemer, da den korrekte mening ofte kan udledes af sammenhængen. Med venstre og højre grænseværdier på plads er vi klar til følgende definition.

Definition 1.6 (afledt fra venstre, afledt fra højre)**.** Hvis

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}$$

eksisterer, kaldes dette f's *afledede fra venstre* i punktet x_0. Tilsvarende er f's *afledede fra højre* i x_0

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

når denne grænse eksisterer.

Et par bemærkninger: Der er en fejl i bogen (en fortegnsfejl) i definitionen af højreafledede. Hvis f er kontinuert i x_0, så er grænseværdien fra venstre og højre $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ begge blot lig $f(x_0)$. Hvis f er differentiabel i x_0, så er de venstre- og højreafledede lig med hinanden og lig med den almindelige afledede.

Vi er nu klar til at formulere sætningen.

Sætning 1.7. *Lad f være 2π-periodisk og stykkevist kontinuert med venstre- og højreafledede overalt. Da konvergerer Fourierrækken* (2) *med koefficienterne givet ved* (4) *punktvis mod f undtagen i punkter, hvor f er diskontinuert. I f's diskontinuitetspunkter konvergerer Fourierrækken mod gennemsnittet af venstre og højre grænseværdi i punktet.*

For at illustrere begreberne og sætningen, betragter vi igen det tidligere eksempel,

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{for } -\pi < x < 0 \\ k & \text{for } 0 < x < \pi \end{cases}, \qquad f(x) = f(x + 2\pi).$$

Denne funktion er, som allerede bemærket, 2π-periodisk. Den er også stykkevist kontinuert og har venstre- og højreafledede overalt (hvad er deres værdier i $-\pi$, 0 og π?), så hvis vi godtager ovenstående sætning uden bevis, så konvergerer dens Fourierrække mod f punktvist, undtagen i $n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, hvor rækken konvergerer mod gennemsnittet af f's venstre og højre grænseværdi.

Den venstre grænseværdi af f i $2n\pi$ er $-k$, mens den venstre grænseværdi i $(2n + 1)\pi$ er k, $n \in \mathbb{Z}$. Den højre grænseværdi af f i $2n\pi$ er k, mens den højre grænseværdi af f i $(2n + 1)\pi$ er $-k$. Dvs. ligegyldigt hvad n er, så er gennemsnittet af venstre og højre grænseværdi i $n\pi$ altid 0. Passer det med, hvad vi allerede ved om Fourierrækkens værdi, hvis vi indsætter $x = n\pi$?