Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 10

Morten Grud Rasmussen

27. september 2014

Opgave 1

[Bogens opgaver 12.1.3, 12.1.7 og 12.1.14]
Eftervis, at følgende funktioner opfylder de tilh orende PDE'er.

1. u givet ved $u(x,t) = \cos(4t)\sin(2x)$ løser den en-dimensionelle bølgeligning for et passende valg af c.

2. u givet ved $u(x,t) = e^{-\omega^2 c^2 t}\cos(\omega x)$ løser den en-dimensionelle varmeligning for et passende valg af c.

3. u givet ved $u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)$ løser den en-dimensionelle bølgeligning for et passende valg af c og alle to gange differentiable funktioner v og w.

4. u givet ved $u(x,y) = \frac{y}{x}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = \frac{2y}{x^3}$.

5. u givet ved $u(x,y) = \sin(xy)$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(xy)$.

6. u givet ved $u(x,y) = e^{x^2-y^2}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = 4(x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$.

7. u givet ved $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ løser den to-dimensionelle Poisson-ligning med f givet ved $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$.

8. u givet ved $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ løser den tre-dimensionelle Laplace-ligning.

9. u givet ved $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ løser den to-dimensionelle Laplace-ligning.

Bemærk, at mens $u(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ løser den tre-dimensionelle *Laplace*-ligning, løser den ellers meget lignende $u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ en to-dimensionel *Poisson*-ligning.

Opgave 2

[Bogens opgave 12.3.1]
Hvordan afhænger frekvensen af fundamentaltilstanden af en vibrerende streng af længden af strengen og af strengens masse per længdeenhed? Hvad sker der, hvis man fordobler trækkraften på strengen? Hvorfor er en kontrabas større end en violin?

Opgave 3

[Bogens opgave 12.3.2]
Hvad sker der, hvis vi ændrer på de forskellige antagelser, vi brugte, da vi udledte bølgeligningen? Er de alle sammen nødvendige?

Opgave 4

[Bogens opgave 12.2.3]
For at se idéerne, som indgik i udledningen af løsningen af bølgeligningen, mere klart, kan du nedskrive udledningen af løsningen som gennemgået i noterne med $L = \pi$, da dette medfører betragtelige forenklinger.

Opgave 5

[Bogens opgave 12.2.5]
Find løsningen til bølgeligningen, hvor $L = 1$, $c^2 = 1$, begyndelseshastigheden $g \equiv 0$ og begyndelsesforvridningen f er givet ved

1. $f(x) = \sin(3\pi x)$
2. $f(x) = 0.01 \sin(3\pi x)$
3. $f(x) = x(1 - x)$
4. $f(x) = \begin{cases} 0.2x & \text{for} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -0.2x + 0.2 & \text{for} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$