Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 5

Morten Grud Rasmussen

18. september 2014

Opgave 1

[Bogens opgave 2.3.3]
Anvend operatoren $(D - 2I)^2$ på følgende funktioner:

1. e^{2x}
2. xe^{2x}
3. e^{-2x}

Opgave 2

[Bogens opgave 2.3.7]
Faktorisér $(9D^2 - I)y = 0$ og løs herefter ODE'en. At faktorisere udtrykket $9D^2 - I$ betyder, at der findes et ydtryk på formen $a(D - r_1 I)(D - r_2 I)$ som er lig med $9D^2 - I$, hvor a, r_1 og r_2 er tal.

Opgave 3

[Bogens opgave 2.4.5]
Hvad er vibrationsfrekvenserne for et masse-fjeder-system, hvor massen er $5\,\mathrm{kg}$ og

1. fjederen har en fjederkonstant $k_1 = 20\,\mathrm{N/m}$
2. fjederen har en fjederkonstant $k_1 = 45\,\mathrm{N/m}$
3. begge fjedre ovenfor er monteret, den ene inden i den anden.[1]

Opgave 4

[Bogens opgave 2.5.5]
Find en generel løsning til ODE'en $4x^2y''(x) + 5y(x) = 0$.

[1] I bogen er en tåbelig tegning, som har fjedrene ved siden af hinanden. Dette er blot til almindelig forvirring, da et sådant system vil trække skævt, og næppe kun vil bevæge sig langs en vertikal akse.

Opgave 5

[Bogens opgave 2.4.7]
Betragt et pendul, som består af en masse m i enden af en stang af negligibel masse og længde L, som svinger med en så tilpas lille vinkel ϑ, at det er i orden at erstatte $\sin(\vartheta)$ med ϑ i et luftfrit rum. Tyngdekraften hiver massen nedad med kraften mg, men splitter vi kraften op i komposanter, vil $mg\cos(\vartheta)$ trække i modsat retning af stangen, mens en vinkelret del, $mg\sin(\vartheta)$ vil trække vinkelret på stangen, og altså i pendulets bevægelsesretning (tegn!). Find nu, ved at anvende Newtons anden lov, $F = ma$, hvor a er den andenafledede af positionen (da $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$ er $\cos(\vartheta) \approx 1$ og vi kan nøjes med at betragte den ene komposant af stedvektoren), en differentialligning for pendulet. I skulle gerne komme frem til noget i stil med $mL\vartheta'' = -mg\vartheta$. Find en formel for pendulfrekvensen.

Opgave 6

[Bogens opgave 2.5.1]
Antag, at $b = \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2+(a-1)m+b = 0$ har en dobbeltrod i $\frac{1-a}{2}$. Vis ved direkte udregning, at $x^2y''(x) + axy'(x) + by = 0$ i dette tilfælde har løsningen $x \mapsto x^{\frac{1-a}{2}} \ln(x)$.

Antag nu, at $b \neq \frac{1}{4}(a-1)^2$, så $m^2 + (a-1)m + b = 0$ har to forskellige rødder, r_- og r_+. Vis ved direkte udregning, at $x \mapsto x^{r_\pm} \ln(x)$ *ikke* er en løsning til $x^2y''(x) + axy'(x) + by(x) = 0$.

Opgave 7

[Bogens opgave 2.6.3]
Find Wronski-determinanten af $f\colon x \mapsto e^{-0.4x}$ og $g\colon x \mapsto e^{-2.6x}$. Vis ved direkte udregning, at f og g er lineært uafhængige. Vis det derefter vha. Korollar 2.3.

Opgave 8

[Bogens opgave 2.6.11]

1. Find en andenordens homogen, lineær ODE, som har $f\colon x \mapsto e^{-2.5x}\cos(0.3x)$ og $g\colon x \mapsto e^{-2.5x}\sin(0.3x)$ som løsninger.
2. Vis, at f og g er lineært uafhængige.
3. Find en løsning for den opstillede ODE, som opfylder begyndelsesværdibetingelserne $y(0) = 3$, $y'(0) = -7.5$.

Opgave 9

[Bogens opgaver 2.7.1 og 2.7.5]
Find generelle løsninger til følgende ODE'er.

1. $y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 10e^{-3x}$
2. $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = e^{-x}\cos(x)$