Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 6

Morten Grud Rasmussen

21. september 2014

Opgave 1

[Bogens opgave 2.8.7]
Betragt ODE'en

$$(4D^2 + 12D + 9I)y(t) = 225 - 75\sin(3t).$$

Hvis vi "homogeniserer" den (altså sætter højresiden lig 0), så kan den tolkes som en model for et masse-fjeder-system med dæmpning. Vi ved, at alle løsninger til denne homogene ligning konvergerer mod 0, når $t \to \infty$. Da samtlige løsninger til den inhomogene ligning kan skrives som en partikulær løsning plus en løsning til den homogene, og alle løsninger til den homogene går mod 0, så må alle løsninger konvergere mod den samme partikulære løsning. Find denne.

Opgave 2

[Bogens opgave 2.8.11]
Find den generelle løsning til $(D^2 + 2I)y(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t)$.

Opgave 3

[Bogens opgave 2.8.19]
Betragt ODE'en

$$(D^2 + 2D + 2I)y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\sin(\tfrac{1}{2}t)$$

Find den løsning, som alle løsninger konvergerer imod. Løs begyndelsesværdiproblemet $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Plot forskellen på de to løsninger, og se, hvor hurtigt forskellen bliver lille.

Opgave 4

[Bogens opgave 2.8.25]
Løs begyndelsesværdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = \cos(\omega t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

hvor $\omega^2 \neq 0$. Vis, at løsningen kan skrives som

$$y(t) = \frac{2}{1-\omega^2} \sin(\frac{1}{2}(1+\omega)t) \sin(\frac{1}{2}(1-\omega)t).$$

Eksperimentér med valget af ω på en lommeregner eller noget andet, der kan plotte grafen for løsningen. Hvad sker der for små ω? For store? For ω^2 tæt på 1?

Opgave 5

[Bogens opgaver 2.10.5, 2.10.7 og 2.10.11]
Løs følgende ODE'er ved hjælp af enten de ubestemte koefficienters metode eller vha. de arbitrære parametres variationsmetode.

1. $y''(x) + y(x) = \cos(x) - \sin(x)$
2. $(D^2 - 4D + 4I)y(x) = 6\frac{e^{2x}}{x^4}$
3. $(x^2 D^2 - 4xD + 6I)y(x) = 21x^{-4}$

Opgave 6

[Bogens opgave 2.10.14]
Hvis både de ubestemte koefficienters metode og de arbitrære parametres variationsmetode kan bruges, så er førstnævnte at foretrække, da den er meget nemmere at bruge. Anvend selv begge metoder på følgende to eksempler:

1. $y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) = 65\cos(2x)$
2. $y'' - 2y' + y = r_1 + r_2$, hvor $r_1(x) = 35e^{\frac{3}{2}}e^x$ og $r_2(x) = x^2$.

Forsøg at opfinde en version af de ubestemte koefficienters metode, som virker på Euler-Cauchy-ligninger.

Opgave 7

[Bogens opgave 4.1.11]
Løs ODE'en $4y'' - 15y' - 4y = 0$ på to måder: først ved at konvertere det til et system af førsteordens ODE'er, dernæst ved de sædvanlige metoder.