

Matematisk modellering og numeriske metoder

Opgaver til Lektion 7

Morten Grud Rasmussen

29. september 2014

Opgave 1

[Bogens opgave 9.8.5]

Udregn divergensen af vektorfeltet $v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved $v(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$ og find værdien i punktet $P = (-1, 3, -2)$.

Opgave 2

[Bogens opgave 9.8.11]

Vis, at strømningen givet ved hastighedsvektorfeltet $v(x, y, z) = (y, 0, 0)$ er inkompressibelt. Hvor er partiklerne, som til tiden $t = 0$ er i kuben $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$, til tiden $t = 1$?

Opgave 3

[Bogens opgave 9.8.13]

Hastighedsvektorfeltet for en inkompressibel væske, som roterer i en cylindrisk beholder er på formen $v(r) = w \times r$, hvor $r = (x, y, z)$ og w er den konstante rotationsvektor. Vis, at $\operatorname{div}(v) = 0$. Er dette forventeligt?

Opgave 4

[Bogens opgave 9.9.3]

Bevis noterne til lektion 7's Sætning 2.5.

Opgave 5

[Bogens opgaver 9.9.5 og 9.9.7]

Find rotationen af følgende vektorfelter:

1. $v(x, y, z) = (x^3yz, xy^3z, xyz^3)$

2. $v(x, y, z) = (0, 0, e^{-x} \sin(y))$

Opgave 6

[Bogens opgaver 9.9.9 og 9.9.11]

Et fluidum bevæger sig i en konstant strømning, som er givet ved hastighedsvektorfeltet v . Find i følgende to tilfælde ud af, om v er ikke-roterende og inkompressibelt. Tegn strømlinjer for partiklerne i fluidummet.

1. $v(x, y, z) = (0, 3z^2, 0)$

2. $v(x, y, z) = (y, -2x, 0)$

Opgave 7

[Bogens opgave 9.9.14]

Vis, at hvis u , v og f er tilpas differentiable, hvor u og v er vektorfelter og f er en funktion, så gælder følgende identiteter:

1. $\text{curl}(u + v) = \text{curl}(u) + \text{curl}(v)$

2. $\text{div}(\text{curl}(v)) = 0$

3. $\text{curl}(fv) = \text{grad}(f) \times v + f \text{curl}(v)$

4. $\text{curl}(\text{grad}(f)) = 0$

5. $\text{div}(u \times v) = v \cdot \text{curl}(u) - u \cdot \text{curl}(v)$

Opgave 8

[Bogens opgave 9.9.15 og 9.9.19]

Lad $u(x, y, z) = (z, x, y)$, $v(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$ og $g(x, y, z) = x + y + z$. Udregn følgende:

1. $\text{curl}(v + u)$

2. $\text{curl}(u + v)$

3. $\text{curl}(gu)$

4. $\text{curl}(gu + v)$