Matematisk modellering og numeriske metoder
Opgaver til Lektion 9

Morten Grud Rasmussen

25. september 2014

Opgave 1

[Bogens opgaver 11.2.1, 11.2.11 og 11.2.15]
Afgór, om følgende funktioner er hhv. lige, ulige eller hverken lige eller ulige.

1. $x \mapsto e^x$
2. $x \mapsto e^{-|x|}$
3. $x \mapsto x^3 \cos(nx)$
4. $x \mapsto x^2 \tan(\pi x)$
5. $x \mapsto \sinh(x) - \cosh(x)$
6. $x \mapsto x^2$, $x \in (-1, 1)$
7. $x \mapsto \begin{cases} -x - \pi & \text{for} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \\ x & \text{for} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

I de to sidste tilfælde ønskes Fourierrækken med periode hhv. $p = 2$ i næstsidste tilfælde og $p = 2\pi$ i sidste tilfælde.

Opgave 2

[Bogens opgave 11.2.19]
Vis vha. Fourierrækkeudvikling, at $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$ og at $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$. Hvad er Fourierrækken for $x \mapsto \cos^4(x)$?

Opgave 3

[Bogens opgave 11.2.20]
Brug resultatet fra Opgave 1 om $x \mapsto x^2$'s Fourierrække til at vise, at

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots .$$

Opgave 4

[Bogens opgaver 11.2.25, 11.2.26, 11.2.27 og 11.2.30]
I det følgende betragter vi funktioner, som kun er defineret på $[0,\pi]$. Vi vil udregne lige hhv. ulige halvsidige Fourierudviklinger med periode 2π, som svarer til Fourierrækker i hhv. $x \mapsto \cos(nx)$- og $x \mapsto \sin(nx)$. Skitsér de lige og ulige 2π-periodiske udvidelser af nedenstående funktioner, og udregn deres Fourierrækker.

1. $x \mapsto \pi - x$, $x \in [0,\pi]$.
2. $x \mapsto \begin{cases} x & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$
3. $x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{for} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ -x + \pi & \text{for} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

Vis, at de lige og ulige Fourierrækker for funktion nr. 3 kan fås udfra Fourierrækkerne for funktion nr. 2.