Analyse 1 - Aflevering 2

Gruppe G4-104 & G3-115
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud Rasmussen
3 pages

September 18, 2015

Opgave 112

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en vilkårlig begrænset reel talfølge og lad talfølgerne $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ være defineret ved

$$b_n = \sup\{a_m | m \geq n\}, \quad c_n = \inf\{a_m | m \geq n\}.$$

(a)

Det bevises nu, at talfølgerne $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ begge er begrænsede. Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er begrænset eksisterer der $l, u \in \mathbb{R}$ hvorom det gælder, at

$$\forall m : l \leq a_m \leq u. \tag{1}$$

Specielt er dette også sandt for $m \geq n$, og dermed er l en nedre grænse og u en øvre grænse for $\{a_m\}_{m=n}^{\infty}$. Eftersom b_n og c_n er hhv. mindste øvre og største nedre grænse for $\{a_m\}_{m=n}^{\infty}$ gælder det, at

$$\forall m \geq n : l \leq c_n \leq a_m \leq b_n \leq u. \tag{2}$$

Dette gælder for alle n, så $\forall n \in \mathbb{N} : b_n, c_n \in [l, u]$ og dermed er b og c begrænsede.

■

(b)

Vis, at $b_n \geq c_n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
Dette ses ud fra Ligning (2).

■

(c)

Vis, at $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ voksende.
Da $b_n = \sup(\{a_m\}_{m=n}^{\infty})$ og $c_n = \inf(\{a_m\}_{m=n}^{\infty})$, da gælder der, at

$$\forall m \geq n : c_n \leq a_m \leq b_n \tag{3}$$

og dermed gælder der specielt også, at

$$\forall m \geq n+1 : c_n \leq a_m \leq b_n. \tag{4}$$

b_n er derfor en øvre grænse for $\{a_m\}_{m=n+1}^{\infty}$, og c_n er en nedre grænse for $\{a_m\}_{m=n+1}^{\infty}$. Eftersom b_{n+1} er den mindste øvre grænse, og c_{n+1} er den største nedre grænse for $\{a_m\}_{m=n+1}^{\infty}$, må det derfor gælde at $b_n \geq b_{n+1}$ og $c_n \leq c_{n+1}$ jævnføre definitionen af mindste øvre og største nedre grænse. Dette betyder, at $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er aftagende, og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ er voksende.

$\blacksquare$

(d)

Vis, at grænseværdierne

$$\lim_{n\to\infty} b_n \quad \text{og} \quad \lim_{n\to\infty} c_n$$

eksisterer.
Da de begge er monotone og begrænsede siger sætning (4.16) i "Funktioner af en og flere Variable" at de er konvergente og derfor har en grænseværdi.
Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} b_n \geq \lim_{n\to\infty} c_n.$$

Da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergerer, så

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |b_n - b| < \epsilon \wedge |c - c_n| < \epsilon, \tag{5}$$

hvor $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ og $\lim_{n\to\infty} c_n = c$.

Da der generelt gælder $t \leq |t|$ for $t \in \mathbb{R}$, så må det også gælde at $b_n - b < \epsilon$ og $c - c_n < \epsilon$.
Dette medfører

$$c - \epsilon < c_n \text{ og } b_n < \epsilon + b. \tag{6}$$

Da $c_n \leq b_n$ må der derfor gælde, at

$$c - \epsilon < b + \epsilon \Leftrightarrow c - b < 2\epsilon. \tag{7}$$

Antag nu at $b < c$. Dermed er $c - b > 0$. Sæt $\epsilon = \frac{1}{3}(c - b) > 0$. Dette indsættes i uligheden og der fås

$$c - b < \frac{2}{3}(c - b). \tag{8}$$

Dette er en modstrid, hvilket falsificerer antagelsen om at $b < c$ og dermed må der gælde at $c \leq b$.

■