Analyse 1: Opgave 113 + 126

G4-103 (opg. 113) + G4-111 (opg. 126)

21. september 2015

Opgave 113 (Ved divergens mod ∞ er det nok at se på store M) *Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en reel talfølge og lad $M_0 \in \mathbb{R}$ være givet. Bevis, at $a_n \to \infty$, hvis og kun hvis*

$$\forall M \geq M_0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad a_n > M$$

'Hvis':

Der gælder $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$

Pr. def. 4.17:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad a_n > M$$

Specielt gælder det også for $M \geq M_0$

'Kun hvis':

Der gælder nu:

$$\forall M \geq M_0 \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \quad \Rightarrow \quad a_n > M$$

Lad M være givet, så er der følgende muligheder:

1 $M \geq M_0 : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a_n > M$

2 $M' < M_0 :$ Specielt gælder at $\exists N \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad a_n > M_0 > M'$

Dermed kan vi afparerer alle M og dermed har vi $a_n \to \infty$ for $n \to \infty$

$\blacksquare$

Opgave 126 (Mere om lim sup og lim inf). *Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en begrænset reel talfølge og lad tallene*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad og \quad \liminf_{n\to\infty} a_n$$

være defineret som i Opgave 112.

(a) *Vis, at* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *har en delfølge, der konvergerer mod* $\limsup_{n\to\infty} a_n$*. Vis også, at den har en delfølge, der konvergerer mod* $\liminf_{n\to\infty} a_n$*.*

Talfølgen $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er defineret ved $b_n = sup\{a_m : m \geq n\}$. Lad $b = \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$ jævnfør definitionen i opgave 112.

Da $b_1 = sup\{a_m : m \geq 1\}$ er den mindste øvre grænse for mængden $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ gælder det jævnfør sætning 3.12 at $\forall \varepsilon > 0 \exists a_n : a_n > b_1 - \varepsilon$. Sæt $\varepsilon = 1$. Da gælder det at

$$\exists a_n \in \{a_m : m \geq 1\} : b_1 - 1 < a_n \leq b_1$$

Dette betyder, at

$$\exists n_1 \geq 1 : b_1 - 1 < a_{n_1} \leq b_1$$

Sæt nu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ og lad $b_{n_1+1} = sup\{a_m : m \geq n_1 + 1\}$, som før vides det at

$$\exists n_2 \geq n_1 + 1 : b_{n_1+1} - \frac{1}{2} < a_{n_2} \leq b_{n_1+1}$$

Så generelt gælder det at $\exists n_k \geq n_{k-1} + 1 : b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} < a_{n_k} \leq b_{n_{k-1}+1}$ for $k = 1, 2, 3, ...$

Om grænseværdien af venstreside af uligheden vides det, at

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} b_{n_{k-1}+1} - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$$

Jævnfør definitionen vides det at

$$\lim_{k\to\infty} b_{n_{k-1}+1} \to b$$

og det vides jævnfør sætning 4.4 at

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \to 0$$

så $b_{n_{k-1}+1} - \frac{1}{k} \to b$ for $k \to \infty$. Dermed er a_{n_k} klemt inde mellem to konvergente talfølger med samme grænseværdi og så gælder det jævnfør klemmelemmaet i opgave 90 at $a_{n_k} \to b$ for $k \to \infty$. Dermed er det vist, at der kan konstrueres en delfølge $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ således at $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n = b$.

Tilsvarende defineres en talfølge $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ved $c_n = inf\{a_m : m \geq n\}$. Sæt $c = \lim_{n\to\infty} c_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$. Som før vides det per definition at for infimum gælder det at $\exists n_k \geq n_{k-1} + 1 : c_{n_{k-1}+1} + \frac{1}{k} > a_{n_k} \geq c_{n_{k-1}+1}$ for $k = 1, 2, 3, ...$

Om grænseværdien af venstreside af uligheden vides det, at

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_{k-1}+1} + \frac{1}{k} = \lim_{k\to\infty} c_{n_{k-1}+1} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$$

jævnfør definitionen vides det at

$$\lim_{k\to\infty} c_{n_{k-1}+1} \to c$$

og det vides jævnfør sætning 4.4 at

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \to 0$$

så $c_{n_{k-1}+1} + \frac{1}{k} \to c$ for $k \to \infty$. Dermed er a_{n_k} klemt inde mellem to konvergente talfølger med samme grænseværdi og så gælder det jævnfør klemmelemmaet i opgave 90 at $a_{n_k} \to c$ for $k \to \infty$. Dermed er det vist, at der kan konstrueres en delfølge $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ således at $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

■

(b) *Slut af (a), at hvis talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent , så er $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.*

Antag at talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og sæt a til $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Jævnfør sætning 4.26 gælder det da, at enhver delfølge $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent og $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. Jævnfør (a) findes der to delfølger af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ som defineres:

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{l\to\infty} a_{n_l} = \liminf_{n\to\infty} a_n$$

Heraf følger det at $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ hvorved det er vist, at hvis talfølgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent , så er $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

■

(c) Vis, at hvis $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, så er $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Lad $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ være en konvergent delfølge. For et givet indeks k vides det at $c_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, ...\}$. Da det jævnfør definitionen for delfølger gælder at $k \leq n_k$ gælder det at $a_{n_k} \in \{a_k, a_{k+1}, ...\}$, hvoraf det følger af definitionen af infimum at $c_k \leq a_{n_k}$ for alle indeks k. Da $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er to konvergente reelle talfølger, og $c_n \leq a_{n_k}$ for alle indeks gælder det jævnfør opgave 91 at

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

På samme måde vides det for et givet indeks k at $b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, ...\}$ og $k \leq n_k$ for alle indeks k. Deraf følger det at $a_{n_k} \in \{a_k, a_{k+1}, ...\}$, hvorfor det gælder at $a_{n_k} \leq b_k$ for alle indeks k på grund af definitionen af supremum. Da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergente reelle talfølger, og $a_{n_k} \leq b_n$ gælder det at

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Når $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vides det altså at

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

■

(d) *Vis, at hvis* $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$*, så er talfølgen* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *er konvergent.*

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ være en begrænset reel talfølge, og definer C som mængden af alle delfølger af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sæt $P = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er reel og begrænset, må enhver delfølge i C også være reel og begrænset, hvorfor enhver delfølge i C har en konvergent delfølge, jævnfør Balzano-Weierstrass I (sætning 4.28), hvilke sættes til at udgøre mængden D. Da enhver delfølge af et element i C også er en delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, må der ifølge (c) for ethvert element $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ i D gælde at

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$$

Ved at indsætte P i uligheden ses det, at ethvert element i D må konvergere mod P. Da enhver delfølge af $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ har en delfølge, der konvergerer mod P, medfører det at $\lim_{n\to\infty} a_n = P$, jævnfør opgave 111. Dermed er $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent, hvis $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

■