Bevis for Lemma 4.21 (b)-(d)

Opgave formulering

Bevis følgende udsagn

Lad $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ være reelle talfølger. Så gælder:

$$\text{b)}\quad \left.\begin{array}{l} a_n \to \infty \text{ for } n \to \infty \\ \text{og} \\ r > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ra_n \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

$$\text{c)}\quad \left.\begin{array}{l} a_n \to \infty \text{ for } n \to \infty \\ \text{og} \\ b_n \to \infty \text{ for } n \to \infty \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

$$\text{d)}\quad \left.\begin{array}{l} a_n \to \infty \text{ for } n \to \infty \\ \text{og} \\ \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ er nedadtil begrænset} \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + b_n \to \infty \text{ for } n \to \infty$$

Bevis for (b)

Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod ∞ gælder:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M$$

Lad M være givet. Da ovenstående udtryk omhandler alle $M \in \mathbb{R}$, findes der også et $N' \in \mathbb{N}$ der afparerer et M'. Vi sætter $M' = \frac{1}{r}M$. Altså findes der et N' der afparerer $\frac{1}{r}$'ne del af det givne M. Da $r > 0$, er dette muligt. Alt afhængig af værdien for r eksistere der nu to tilfælde:

$$\left.\begin{array}{ll} a_n > M' \geq M & \text{for } 0 < r \leq 1 \\ eller & \\ a_n > M \geq M' & \text{for } r \geq 1 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Under alle omstændigheder gælder altså:

$$a_n > M' \Leftrightarrow a_n > \frac{1}{r}M \Leftrightarrow ra_n > M$$

Og udsagnet er hermed bevist

Bevis for (c)
Da både $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ og $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergere mod ∞ gælder:

$$M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M$$

$$M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow b_n > M$$

Vi skal vise at:

$$M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n + b_n > M \tag{2}$$

Lad M være givet. Der gælder at:

$$a_n > \frac{M}{2} \tag{3a}$$

$$b_n > \frac{M}{2} \tag{3b}$$

Så gælder

$$a_n + b_n > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

Lad N' være det der afparerer M i (3a) og N'' være det der afparerer M i (3b). Lad nu $N_{max} = \max(N', N'')$. Der findes således et $N \geq N_{max}$, der afparerer (2), hvilket var. hvad vi skulle vise.

Bevis for (d)
Da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergerer mod ∞ gælder:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n > M \tag{4}$$

Og da $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ er nedadtil begrænset gælder der for delmængden $\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ at der eksistere et tal $K \in \mathbb{R}$ således:

$$K \leq b_n \tag{5}$$

Vi skal vise at der gælder:

$$M \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow a_n + b_n > M \tag{6}$$

Lad M være givet for (4). Der vælges nu et N' der afparerer $M' = M - K$. Der gælder således:

$$a_n > M' = M - K \tag{7}$$

Men så afparerer N' ligeledes:

$$a_n + K > M \tag{8}$$

Vi vender nu tilbage til at b_n er nedadtil begrænset. Da (5) gælder, må der, ved at lægge a_n til på begge sider, gælde følgende:

$$a_n + K \leq a_n + b_n \tag{9}$$

Ved at sætte (9) og (8) sammen får vi:

$$M < a_n + K \leq a_n + b_n \Leftrightarrow M < a_n + b_n \tag{10}$$

Altså findes der et $N' \in \mathbb{N}$ der afparerer M i (10), hvilket var hvad vi skulle vise.