Opgavens mål er at bevise Korollar 4.23. Denne er givet som:

- (a) $|z| > 1 \Rightarrow \{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ er divergent.
- (b) $|z| < 1 \Rightarrow \{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.
- (c) $z = 1 \Rightarrow \{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent med $\lim_{n\to\infty} z^n = 1$.
- (d) $|z| = 1$ og $z \neq 1 \Rightarrow \{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ er divergent.

(a)
Antag at talfølgen $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ er konvergent, dvs. lad $z^n \to c$ hvor c er en konstant. Hvis $z^n \to c$ må $|z^n| \to |c|$, for $n \to \infty$ i følge sætning 4.1 (a). Ifølge Korollar 2.20 er $|z^n| = |z|^n$ det kan derfor skrives at $|z|^n \to |c|$. Absolutværdien af det komplekse tal z er dog ifølge Lemma 2.12 givet ved tallet $r \in \mathbb{R}$, hvor $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, samtidig siger sætning 4.22 at for ethvert reelt tal $a > 1$ gælder det at $a^n \to \infty$, dvs. at $|z|^n \to \infty$, hvilket er i modstrid med den oprindelige antagelse.
(b)
Sæt $b_n = z^n$ og $a_n = \frac{1}{|b_n|} = \frac{1}{|z^n|} = \frac{1}{|z|^n} = \left|\frac{1}{z}\right|^n$. Da $\left|\frac{1}{z}\right| > 1$ opnåes det igen fra sætning 4.22 at $a_n \to \infty$. Fra sætning 4.19 (a) får man dog at hvis $a \to \infty$ så gælder at $\frac{1}{a_n} \to 0$ derfor $|b_n| \to 0 \Leftrightarrow b_n \to 0$.
(c)
$z^n = 1^n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.
(d)
Der blev i opgavebeskrivelsen givet et hint om at det var smart at se på $|z^{n+1} - z^n|$. Antag at $\lim_{n\to\infty} z^n = c$ dvs. at z^n er konvergent for $n \to \infty$. En omskrivelse af den ovenstående differens giver $\left|z^{n+1} - z^n\right| = |z^n \cdot z - z^n| = |z^n||z-1| = |z|^n \cdot |z-1| = |z-1|$. Det blev antaget i starten at $\lim_{n\to\infty} z^n = c$ derfor gælder det også at $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = c$. Differensen giver da $|c-c| = 0 = |z-1|$, hvis dette skal være opflydt skal $z = 1$ men ifølge (d) er $z \neq 1$, hvilket giver en modstrid. Så talfølgen er divergent.

Q.E.D.