# Opgave 11 - Punktmængdetopologi, metriske rum, fuldstændighed

Bevis sætning 2.4
**Sætning 2.4.**
Lad $(X, d)$ være et metrisk rum. Så er $(X, T_d)$ et topologisk rum, og alle åbne kugler er åbne mens alle lukkede kugler er lukkede mængder i den inducerede topologi.
**Bevis.**
Først skal det vises at $(X, \tau_d)$ er et topologisk rum, ved at vise at de 3 betingelser gælder. (definition 1.1)

(i) Lad $U_i \in \tau_d \ \forall i \in I$. Det skal nu vises at $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_d$.
Lad $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$. Det medfører at der eksisterer et $i_0 \in I$, således at $x \in U_{i_0}$. Da $U_{i_0}$ er åben gælder det at

$$\exists r > 0 : B_r(x) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

(ii) Lad $U, V \in \tau_d$. Det skal bevises at $U \cap V \in \tau_d$. Antag $y \in U \cap V$. Dvs. at $y \in U \wedge y \in V$. Heraf følger at

$$\exists r_1 > 0 : B_{r_1}(y) \subseteq U$$

$$\exists r_2 > 0 : B_{r_2}(y) \subseteq V$$

Vælg $r = \min\{r_1, r_2\}$, så gælder

$$B_r(y) \subseteq U \cap V$$

(iii) Det gælder trivielt at $\varnothing \in \tau_d$. Ligedes ses det let at $X \in \tau_d$, idet den åbne kugler pr. definition indeholder punkter i X, og derfor vil enhver kugle, uafhængig af radius og centrum altid være en delmængde af $X$.

Hernæst skal det vises at den åbne kugle er en åben mængde.
Lad $x_0 \in B_r(a)$ og lad $r_0 = \frac{r - d(x_0,a)}{2} > 0$. Så har vi for alle $x \in B_{r_0}(x_0)$ at

$$d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, a) < \frac{r - d(x_0, a)}{2} + d(x_0, a) = \frac{r + d(x_0, a)}{2} < r.$$

Altså består $B_r(a)$ kun af indre punkter, idet

$$B_{r_0}(x_0) \subseteq B_r(a)$$

, hvorfor $B_r(a)$ er en åben mængde.

Så bevises det, at den lukkede kugle er en lukket mængde. Det skal altså vises at $X \backslash \bar{B}_r(x)$ er åben. Lad $a \in X \backslash \bar{B}_r(x)$. Lad $r_1 = \frac{d(x,a)-r}{2}$, og da $d(x,a) > r$ er $r_1 > 0$. Lad $b \in B_{r_1}(a)$. Da har vi

$$d(x,b) \geq d(x,a) - d(a,b) > d(x,a) - \frac{d(x,a)-r}{2} = \frac{d(x,a)+r}{2} > r.$$

Heraf følger at

$$B_{r_1}(a) \subset X \backslash \bar{B}_r(x)$$

, og altså at $X \backslash \bar{B}_r(x)$ er åben.