Analyse 1 - Aflevering 3

Gruppe G4-104
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud Rasmussen
2 pages

September 23, 2015

Opgave 132

(a)

Bevis, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, hvis den har en konvergent hale $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$.

Ifølge definitionen for en uendelig række, kan summen af en konvergent uendelig række skrives

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{j\to\infty} s_j, \tag{1}$$

når grænseværdien eksisterer. Da vi ved at "halen" konvergerer, kan der skrives

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} t_n, \tag{2}$$

hvor

$$t_n = \sum_{k=N+1}^{n} a_k \quad , \quad n \geq N+1. \tag{3}$$

Da $n \geq N+1$ må halen nødvendigvis indgå i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + ... + a_N}_{s_N} + \underbrace{a_{N+1} + ... + a_{n-1} + a_n}_{t_n}. \tag{4}$$

Det ses at $s_n = s_N + t_n$.
At "halen" konvergerer, betyder at t_n går imod en grænseværdi, t, hvorom det gælder at

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ n_0 \geq N+1\ \forall\, n \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |t_n - t| \ < \ \epsilon. \tag{5}$$

Dette medfører for et givet ϵ og $n \geq n_0$, at

$$|t_n + s_N - s_N - t| \; < \; \epsilon. \tag{6}$$

Da $s_N + t_n = s_n$, kan der skrives

$$|s_n - (s_N + t)| \; < \; \epsilon. \tag{7}$$

Dette medfører at

$$s_n \to s_N + t \quad for \quad n \to \infty. \tag{8}$$

■

(b)

Bevis, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så er enhver hale $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$ ligeledes konvergent. Da rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent gælder der, at

$$\forall \; \epsilon > 0 \; \exists \; n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}: \; n \geq n_0 \Rightarrow |s_n - s| \; < \; \epsilon. \tag{9}$$

Ifølge (4) gælder der, at $s_n = s_N + t_n$.

$$\begin{aligned} |s_n - s| \; &< \; \epsilon \\ |s_N + t_n - s| \; &< \; \epsilon \\ |t_n - (s - s_N)| \; &< \; \epsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Dette viser at t_n konvergerer, og at grænsen for t_n er givet ved

$$t_n \to s - s_N \quad for \quad n \to \infty. \tag{11}$$

■

(c)

Bevis, at i tilfælde af konvergens gælder der

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n.$$

I a) blev det vist at $s_N + t_n = s_n$ for alle n. Lad nu $n \to \infty$. s_N er en konstant følge og dens grænseværdi er dermed s_N og grænseværdierne for de to andre kendes fra a) og b). Dermed går følgerne mod $s_N + s - s_N = s_N + t \Leftrightarrow s = s_N + t$. Ved at skrive disse tre størrelser ud med sumtegn fås det ønskede.

■