Opgave 138

Bevis for Sætning 4.38
Betragt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p},$$

hvor $p \in \mathbb{R}_+$.

(a) Vis, at den er divergent, hvis $p \leq 1$.
(b) Vis, at den er konvergent, hvis $p > 1$.

Bevis:

(a) Sæt $p \leq 1$. Vi vil nu vise, at rækken er divergent. Vi betragter afsnittene svarende til numre af formen $n = 2^m$ og skriver dem på formen

$$\begin{aligned} s_{2^m} =& 1^{-p} + (2^{-p}) + (3^{-p} + 4^{-p}) \\ &+ (5^{-p} + 6^{-p} + 7^{-p} + 8^{-p}) \\ &+ \cdots \\ &+ ((2^{m-1}+1)^{-p} + (2^{m-1}+2)^{-p} + \cdots + (2^m)^{-p}) \end{aligned}$$

Der er m parenteser. Den k'te af dem indeholder $2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1}$ led, der alle er $\geq 2^{-kp}$, altså er værdien af den k'te parentes $\geq 2^{k-1} \cdot 2^{-kp} = 2^{(k-1)-kp} \geq \frac{1}{2}$, da $(k-1) - kp \geq -1$. Det ses, at

$$s_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2},$$

som går mod ∞ for $m \to \infty$.

(b) Sæt $p > 1$. Vi vil nu vise, at rækken er konvergent. Vi betragter afsnittene svarende til numre af formen $n = 2^m - 1$ (følger af sætning 4.33, side 61) og skriver dem på formen

$$\begin{aligned} s_{2^m-1} =& 1^{-p} + (2^{-p} + 3^{-p}) + \cdots \\ &+ ((2^{m-1})^{-p} + (2^{m-1}+1)^{-p} + \cdots + (2^m-1)^{-p}) \end{aligned}$$

Der er $m-1$ parenteser. Den k'te parentes indeholder 2^k led, der alle er $\leq 2^{-kp}$. Værdien af den k'te parentes er derfor $\leq 2^k \cdot 2^{-kp} = 2^{k-kp} = 2^{k(1-p)}$.
Denne vil vi omskrive til en kvotientrække

$$s_{2^m-1} \leq 1 + \sum_{k=1}^{m-1} 1 \cdot 2^{k(1-p)} = 1 + \sum_{k=1}^{m-1} 1 \cdot (2^{1-p})^k = \sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot (2^{1-p})^k$$

Da $p > 1$ er $|2^{1-p}| < 1$.
Vi ved fra Sætning 4.31, at en kvotientrække på formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots ,$$

er konvergent.
Vi ved da fra Sætning 4.34, at hvis rækken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er konvergent, så er rækken $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, og der gælder

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Ud fra det kan vi se, at s_{2^m-1} er konvergent, da $\sum_{k=0}^{m-1} 1 \cdot (2^{1-p})^k$ konvergerer for $m \to \infty$.