Analyse 1: Opgave 147

G4-111

19. oktober 2015

Opgave 147. Det er nok at se på "små"* δ*. *Lige så vel som det i definitionen af konvergens af en talfølge er nok at se på store* N *(jf. opgave 92), er det i definitionen af kontinuitet nok at se på "små"* δ*, hvormed vi vil forstå* $\delta \leq \delta_0$*, hvor* δ_0 *er et eller andet givet positivt tal. Lad altså* $\delta_0 > 0$ *være givet. Bevis at betingelsen*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, \delta_0] \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

er ensbetydende med (5.1) i Definition 5.3 på side 70.

Bevis. Det bevises først at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{1}$$
$$\Uparrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, \delta_0] \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{2}$$

Lad (2) være opfyldt og $\varepsilon > 0$ være givet. Så eksisterer der et $\delta \in]0, \delta_0]$, som afparerer ε i (2). Da gælder det, at δ også afparerer ε i (1).

Dernæst bevises det at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3}$$
$$\Downarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in]0, \delta_0] \forall x \in A : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4}$$

Lad (3) være opfyldt og $\varepsilon > 0$ være givet. Da eksisterer der et $\delta > 0$, som afparerer ε i (3). Beviset følger i to tilfælde. Hvis $\delta \leq \delta_0$ afparerer δ også ε i (4). Hvis $\delta > \delta_0$ vælges da et δ', som opfylder at $\delta > \delta_0 \geq \delta' > 0$. Da gælder det at

$$\{x \mid |x - a| < \delta'\} \subseteq \{x \mid |x - a| < \delta\}$$

Så er $\delta' \in]0, \delta_0]$, og δ' afparerer ε i (3). Dermed afparerer δ' også ε i (4).

Dermed er det bevist at (1) og (2) er ækvivalente.

■