Analyse 1 - Aflevering 5

Gruppe G4-104
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud Rasmussen
2 pages

October 19, 2015

Opgave 148

Vis, at hvert af de følgende tre udtryk 1, 2 og 3 er ensbetydende med, at f er kontinuert i a (udtryk 0):

$$\begin{aligned}
0:&\quad \forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x\in A:|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon\\
1:&\quad \forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x\in A:|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|\leq\epsilon\\
2:&\quad \forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x\in A:|x-a|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|\leq\epsilon\\
3:&\quad \forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall x\in A:|x-a|\leq\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\epsilon,
\end{aligned}$$

hvor f er en funktion defineret for alle $x \in A$

For at vise at alle fire udtryk er ensbetydende er det nok at vise, at der gælder for udtrykkene 0,1,2 og 3, at $0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 0$, da dette er ensbetydende med at $0 \Leftrightarrow 1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$. Dette gælder, da implikationerne mod venstre fås ved at gå gennem hele rækken af implikationer. For eksempel kan $0 \Leftarrow 1$ vises ud fra $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 0$.

For at vise at $0 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 0$ er gældende, vises hver af de fire implikationer for sig. For at bevise hver af implikationerne, skal det vises, at der, for et vilkårligt ϵ, eksisterer et δ så det andet af de to udsagn er opfyldt. I hvert af beviserne benyttes δ' og ϵ' om det første af de to udsagn og δ og ϵ om det sidste af de to.

Først vises $0 \Rightarrow 1$.

Lad et vilkårligt $\epsilon > 0$ være givet. For $\epsilon' = \epsilon$ eksisterer ifølge udtryk 0 et δ', for hvilket der gælder $|x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon' \leq \epsilon$. Bemærk at $\epsilon' = \epsilon \Rightarrow \epsilon' \leq \epsilon$. Hvis δ' sættes til at være δ fås udtryk 1. Dermed medfører udtryk 0 udtryk 1.

Nu vises $1 \Rightarrow 2$.

Lad et vilkårligt $\epsilon > 0$ være givet. For $\epsilon' = \epsilon$, eksisterer der, ifølge udtryk 1, et $\delta' > 0$, for hvilket der gælder, at $|x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon' = \epsilon$. Vælg nu $\delta = \frac{1}{2}\delta'$. Dermed gælder der, at $|x-a| \leq \delta = \frac{1}{2}\delta' \Rightarrow |x-a| < \delta' \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$. Dermed kan δ' erstatte det δ, som udsagn 2 påstår eksisterer for ethvert ϵ.

Nu vises $2 \Rightarrow 3$.
Lad et vilkårligt $\epsilon > 0$ være givet. For $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$ eksisterer der, ifølge udsagn 2, et δ' så $|x - a| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon'$. $\epsilon' < \epsilon$ er gældende, så hvis δ sættes til δ' gælder der, at $|x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$. Altså medfører udsagn 2 udsagn 3.

Nu vises $3 \Rightarrow 0$.
Lad et vilkårligt $\epsilon > 0$ være givet. For $\epsilon' = \epsilon$ eksisterer der, ifølge udsagn 3, et δ', så $|x - a| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon'$. Hvis δ sættes til δ', gælder der, at $|x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| \leq \delta'$. Ved at benytte dette fås $|x - a| < \delta \Rightarrow |x - a| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon' = \epsilon$, hvilket viser, at udsagn 0 er sandt hvis udsagn 3 er sandt.

Da hver af de fire implikationer er sande, gælder der, ifølge ovenstående argumentation, at de alle er ensbetydende og det ønskede er dermed vist.

$\blacksquare$