Metriske rum: Opgave 14

Lemma
Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) være metriske rum. Lad $f : X \to Y$ være en funktion. f er kontinuert i punktet $x_0 \in X$ i "topologisk forstand", hvis og kun hvis f er kontinuert i x_0 i "ϵ-δ-forstand". Her skal kontinuert i x_0 "i ϵ-δ-forstand" forstås som:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in X : d_X(x_0, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_0), f(a)) < \epsilon. \tag{1}$$

Bevis
Først bemærkes det, at ϵ-δ kontinuiteten ved hjælp af åbne kugler kan udtrykkes som følgende:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0)). \tag{2}$$

Nu vises "hvis" delen af lemmaet.
Lad $N \subset Y$ være en vilkårlig omegn omkring $f(x_0)$. Da eksisterer en åben mængde $U \subset N$, hvor $f(x_0) \in U$. Da U er en åben mængde og punktet $f(x_0) \in U$, må $f(x_0)$ være et indre punkt, hvilket betyder, at der eksisterer et $\epsilon > 0$, så $B_\epsilon(x_0) \subset N$. Nu giver ϵ-δ kontinuiteten, at der eksisterer et $\delta > 0$, så $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$, hvor $B_\delta(x_0)$ er en åben kugle og dermed en åben mængde og $x_0 \in B_\delta(x_0)$. Eftersom $B_\epsilon(f(x_0)) \subset N$, må $B_\delta(x_0) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0))) \subset f^{-1}(N)$. Dermed er $f^{-1}(N)$ en omegn af x_0 for enhver omegn N af $f(x_0)$, hvilket er definitionen på, at f er kontinuert i x_0 i "topologisk forstand".

Nu vises "kun hvis" delen af lemmaet.
Lad $\epsilon > 0$ være givet. Da er $B_\epsilon(f(x_0))$ en åben mængde, der indeholder $f(x_0)$ og $B_\epsilon(f(x_0))$ er dermed en omegn af $f(x_0)$. f er kontinuert i x_0 i "topologisk forstand", så $f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$ er en omegn af x_0. Derfor eksisterer der en åben mængde $U \in X$, så $U \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(x_0)))$, hvor $x_0 \in U$. Da x_0 er et indre punkt i U eksisterer der et $\delta > 0$, så $B_\delta(x_0) \subset U$. Dette medfører at $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$, hvilket er ækvivalent med at f er kontinuert i x_0 i "ϵ-δ-forstand".

■

Bevis Sætning 2.5 (Følgekarakterisation af kontinuitet).

> **Sætning 2.5**
> *Lad (X, d_x) og (Y, d_y) være metriske rum. Så er $f : X \to Y$ kontinuert (fra (X, d_x) til (Y, d_y)) hvis og kun hvis f er følgekontinuert.*

Bevis:
Lad indledningsvist (X, d_x) og (Y, d_y) være to metriske rum, lad $x_0 \in X$ være et punkt i X og lad $f : X \to Y$ være en funktion på X. f er kontinuert i x_0 hviss følgende betingelse er opfyldt:

For enhver konvergent følge $\{a_n\}$ i X med grænsepunkt x_0 gælder at

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0). \tag{3}$$

Bemærk, at dette blot er en generalisering af Definition 5.6 (Følgekontinuitet) i [Funktioner af en og flere variable] til metriske rum.

Altså skal det bevises, at f er kontinuert, hviss f opfylder (3). Først bevises 'hvis'-udsagnet.

(i) Antag at (3) er opfyldt. Det skal nu vises, at f er kontinuert i x_0, hvilket gøres ved et modstridsbevis. Antag for modstrid, at f ikke er kontinuert i x_0. Det vil sige, at der eksisterer et $\varepsilon > 0$ som ikke kan afpareres af noget $\delta > 0$. Specielt kan ingen af tallene $1/n$, for $n = 1, 2, 3, \ldots$, afparere ε. Ergo må der for ethvert n findes et $a_n \in X$ således, at $d(a_n, x_0) \leq 1/n$ og

$$|f(a_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon. \tag{4}$$

Her er $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$, dvs. $\{a_n\}$ er en følge med x_0 som grænsepunkt. Da betingelse (3) pr. antagelse er opfyldt, må det gælde, at $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. Altså må der eksistere en N således, at

$$|f(x_n) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

for alle $n \geq N$. Dette er dog i modstrid med (4). Ergo må f være kontinuert i x_0. Nu bevises 'kun hvis'-udsagnet.

(ii) Antag nu at f er kontinuert i x_0, og lad $\{a_n\}$ være en følge i X med grænsepunkt x_0. Det skal nu vises, at $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$. Lad derfor $\varepsilon > 0$ være givet. Da f er kontinuert i x_0 kan der findes et $\delta > 0$ således, at

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon, \tag{5}$$

Når $d(x, x_0) \leq \delta$. Nu udnyttes, at $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ til at konkludere, at der eksisterer et $N \in \mathbb{N}$ således, at

$$d(a_n, x_0) \leq \delta \tag{6}$$

for alle $n \geq N$. Sammenstilles (6) med (5) fås, at $|f(a_n) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, når $n \geq N$. Dermed er det vist, at (3) er opfyldt.

$\blacksquare$