Opgave 164

(a): Lad $f : D_f \to \mathbb{R}$ være injektiv og lad $g : V_f \to \mathbb{R}$ være f's omvendte funktion f^{-1}. Bevis, at $g(f(x)) = x$ for alle $x \in D_f$.

Definér $f(x) = y$. Så fås $g(f(x)) = g(y)$, og idét g er defineret som f's omvendte funktion gælder det at $g(y) = x$, hvoraf det følger at

$$g(f(x)) = x$$

(b): Bevis at $f(g(y)) = y$ for alle $y \in V_f$.
Af opgave (a) gælder $g(f(x)) = x$. Tages f på begge sider af lighedstegnet fås $f(g(f(x))) = f(x)$. Heraf følger det

$$f(g(y)) = y$$

(c): Bevis at g er injektiv, og at $g^{-1} = f$.
Bevis for at g er injektiv:
Antag at $y_1 \neq y_2$ og definér at $x_1 = g(y_1)$ og $x_2 = g(y_2)$. Det skal vises at $x_1 \neq x_2$. Af opgave (b) følger det at

$$f(x_1) = f(g(y_1)) = y_1 \neq y_2 = f(g(y_2)) = f(x_2)$$

Da $f(x_1) \neq f(x_2)$ følger det at $x_1 \neq x_2$.
Bevis for at $g^{-1} = f$:
Lad $g(y) = x$. Så er $f(g(y)) = f(x)$, hvorved det følger af opgave (b) at

$$y = f(x)$$

Dette beviser at $g^{-1} = f$.