Opgave 17

Giv et induktionsbevis for formlen

$$r^n - s^n = (r-s)\sum_{j=0}^{n-1} r^j s^{n-j-1}$$

Lad $P(n)$ være følgende udsagn:

$$r^n - s^n = (r-s)\sum_{j=0}^{n-1} r^j s^{n-j-1}$$

Vi skal gøre to ting for at bevise, at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$. Først skal vi i skal vise, at $P(1)$ er sand og derefter vise, at hvis $P(k)$ er sand, så er $P(k+1)$ ~~sand for alle $1 \leq k < n$ for $n \in \mathbb{N}$~~. Vi starter med at vise, at $P(1)$ er sand:

$$\begin{aligned} r^1 - s^1 = r - s &= (r-s)r^0 s^{1-0-1} \\ &= (r-s)r^0 s^0 \\ &= r - s \end{aligned}$$

Vi ser, at $P(1)$ er sand. Vi antager nu, at $P(k)$ er sand for et $k \geq 1$:

$$r^k - s^k = (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j-1}$$

Vi skal nu vise, at $P(k+1)$ er sand, altså undersøge om $r^{k+1} - s^{k+1} = (r-s)\sum_{j=0}^{(k+1)-1} r^j s^{(k+1)-j-1}$ er sand.

Vi vil undersøge, om højresiden er lig venstresiden:

$$\begin{aligned} &(r-s)\sum_{j=0}^{(k+1)-1} r^j s^{(k+1)-j-1} \\ &= (r-s)\sum_{j=0}^{k} r^j s^{k-j} \\ &= (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j} + (r-s)r^k s^{k-k} \\ &= (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j} + (r-s)r^k \end{aligned}$$

Vi anvender nu ~~udtrykket for~~ $P(k)$. For at kunne gøre dette tager vi s uden for parentesen:

$$\cancel{r^{k+1} - s^{k+1} =} s\left((r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j-1}\right) + (r-s)r^k$$

Udtrykket i parentesen er kan nu erstattes med $\left(r^k - s^k\right)$, da vi antog, at:
$r^k - s^k = (r-s)\sum_{j=0}^{k-1} r^j s^{k-j-1}$:

$$s\left(r^k - s^k\right) + (r-s)r^k = sr^k - s^{k+1} + r^{k+1} - sr^k = r^{k+1} - s^{k+1}$$

Vi har nu bevist, at $P(k+1)$ er sand, og dermed er $P(n)$ sand for alle $n \in \mathbb{N}$.