# Kapitel 1

# Bevis for Sætning 1.12

### Opgave formulering

Bevis, at enhver ikke-tom delmængde $A$ af $\mathbb{N}$ har et mindste element.

*Vink: Antag, at $A \subseteq \mathbb{N}$ ikke har noget mindste element, og vis derudfra ved induktion, at udsagnet $U_n$ er sandt for alle $n$, hvor $U_n$ er udsagnet*

$$U_n : m \in A \Rightarrow m > n$$

Slut heraf, at $A \cap \mathbb{N} = \emptyset$

**Bevis.**
Antag at $A \subseteq \mathbb{N}$ er ikke-tom delmængde og antag, at $A$ ikke har et mindste element.
Lad udsagnet $U_n$ være

$$U_n : m \in A \Rightarrow m > n$$

For $U_1$ er udsagnet

$$m \in A \Rightarrow m > 1$$

Hvilket er sandt da 1 er det mindste element inden for de naturlige tal, og dermed kan $m$ ikke være 1, da 1 så ville være mindste element i A.
Vi antager at $U_n$ er sandt, og beviser $U_{n+1}$.

$$U_{n+1} : m \in A \Rightarrow m > n + 1$$

Vi antager for modstrid $\forall m > n + 1$ ikke er sandt, og får dermed udsagnet:

$$U_{n+1} : \exists m \in A \Rightarrow m \leq n + 1 \tag{1.1}$$

Vi ved fra $U_n$ at $m > n$, og ifølge $U_{n+1}$ at $m \leq n + 1$. Derfor eksistere der et $m$ så:

$$n < m \leq n + 1$$

Derudfra kan vi sige:

$$m = n + 1$$

Da $A \subseteq \mathbb{N}$.
Da $U_n$ er sandt, medføre det at $\forall e \in A : e \geq n + 1 > n$.
Derfor er $n+1$ det mindste element, men antagelsen var at der ikke var noget mindste element. Derfor er modstriden i ligning 1.1 forkert, og $U_n$ er sandt $\forall n \in \mathbb{N}$. Da $U_n$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$, og $A \subseteq \mathbb{N}$ gælder specielt, for $a \in A$.

$$a > a$$

Dette er umuligt, og antagelsen om at $A$ ikke har et mindste element er forkert, ergo har $A$ et mindste element. Q.E.D.