Opgave 184
Vis, at hvis $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent punktfølge, så er talfølgen $\{\|x^k\|\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent, og

$$\lim_{k\to\infty}(\|x^k\|) = \|\lim_{k\to\infty} x^k\|. \tag{1}$$

Altså vi skal vise at $\|x^k\| \to \|x\|$ for $k \to \infty$
Da $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent kan vi sige at $x^k \to x$ for $k \to \infty$.
I følge sætning 6.4 (c) får vi så at $x^k - x \to \mathbf{o}$ for $k \to \infty$.
I følge sætning 6.4 (d) kan vi tage normen på begge sider og vi får $\|x^k - x\| \to 0$ for $k \to \infty$.
Af trekantsuligheden fra sætning 6.49 (c) kan vi nu skrive

$$\Big|\|x^k\| - \|x\|\Big| \leq \|x^k - x\| \tag{2}$$

Da vi ved at $\big|\|x^k\| - \|x\|\big| \geq 0$ og at $\big|\|x^k\| - \|x\|\big| \leq \|x^k - x\|$ hvor $\|x^k - x\| \to 0$, så må $\big|\|x^k\| - \|x\|\big| \to 0$ for $k \to \infty$.
Til sidst bruges lemma 6.4 (d) og (c):

$$\|x^k\| - \|x\| \to \mathbf{o} \Leftrightarrow \|x^k\| \to \|x\| \text{ for } k \to \infty \tag{3}$$

Q.E.D