Opgave 185

Det antages indledningsvist, at punktfølgerne:

$$\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{og} \quad \{y^k\}_{k=1}^{\infty} \tag{1}$$

er konvergente. At punktfølgerne er konvergente betyder – jf. Definition 6.2 – at der eksisterer et punkt $x \in \mathbb{R}^n$ og $y \in \mathbb{R}^n$ således, at

$$\lim_{k\to\infty} ||x - x^k|| = 0 \quad \text{og} \quad \lim_{k\to\infty} ||y - y^k|| = 0. \tag{2}$$

På grundlag af (2) gælder, at

$$x^k \to x \quad \text{for} \quad k \to \infty \quad \text{og} \quad y^k \to y \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{3}$$

Herudfra skal det bevises, at punktfølgen:

$$\{x^k \pm y^k\}_{k=1}^{\infty}, \tag{4}$$

også er konvergent og at

$$\lim_{k\to\infty} (x^k \pm y^k) = \lim_{k\to\infty} x^k \pm \lim_{k\to\infty} y^k.$$

Med andre ord: Hvis $x^k \pm y^k = z^k$ og $x \pm y = z$, skal det bevises, at følgende udsagn gør sig gældende.

$$z^k \to z \quad \text{dvs.} \quad ||z^k - z|| \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{5}$$

Det bevises nu, at (4) er konvergent under antagelsen om, at (1) er konvergent. Dette gøres ved at opskrive (6), eftersom det er ækvivalent med udtrykket for normen i (5).

$$||(x^k \pm y^k) - (x \pm y)|| \tag{6}$$

I (7) ophæves parenteserne og i (8) samles x'erne og y'erne på hver sin side af $\pm$, hvilket gøres på baggrund af Lemma 4.7 og (d) i Lemma 4.8.

$$||x^k \pm y^k - x \mp y||. \tag{7}$$

$$||(x^k - x) \pm (y^k - y)||. \tag{8}$$

Jf. trekantsuligheden gælder:

$$||(x^k - x) \pm (y^k - y)|| \leq ||x^k - k|| + ||y^k - y||. \tag{9}$$

Jf. (3) gælder for (9), at:

$$||x^k - x|| + ||y^k - y|| \to ||x - x|| + ||y - y|| \to 0 + 0 = 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty.$$

Q.E.D.

$\blacksquare$