Opgave 186

Opgaveformulering(Bevis for Sætning 6.1 (c)):

Vis, at hvis $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ er en konvergent talfølge og $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ en konvergent punktfølge, så er punktfølgen $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent, og

$$\lim_{k\to\infty} a_k x^k = \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x^k.$$

Bevis. Lad $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ være en konvergent talfølge og $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ en konvergent punktfølge i $\mathbb{R}^n$.
Vi skal bevise, at punktfølgen $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent, og

$$\lim_{k\to\infty} a_k x^k = \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x^k.$$

Da punktfølgen $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent, så er talfølgen $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ for $j = 1, 2, ..., n$ konvergent(jf. Lemma 6.5 s. 89 i bogen). Altså gælder

$$\lim_{k\to\infty} x^k = x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j.$$

Da både $\{x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ og $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ er talfølger anvendes nu Sætning 4.1(d)(s. 49 i bogen), der siger, at produktet af to konvergente talfølger er konvergent. Altså er $\{a_k x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent, og

$$\lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x_j^k = \lim_{k\to\infty} a_k x_j^k.$$

Da $\{a_k x_j^k\}_{k=1}^{\infty}$ er konvergent, så er $\{a_k x^k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent(jf. Lemma 6.5), og

$$\lim_{k\to\infty} a_k x_j^k \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k x^k = \lim_{k\to\infty} a_k \lim_{k\to\infty} x^k.$$

Opgave 187

Opgaveformulering:

Lad $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ være punktfølger i $\mathbb{R}^n$.

Vis, at hvis $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$ og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ er begrænset, så gælder

$$\lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle = 0.$$

Vink: Cauchy-Schwarz' ulighed.

Bevis. Lad $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$ og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ være begrænset. Da gælder, at der findes et reelt tal $M > 0$, således $\|y^k\| \leq M$. For at komme videre introduceres Cauchy-Schwarz' ulighed(se s. 108 i bogen):

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Nu anvendes Cauchy-Schwarz' ulighed og $\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ er begrænset:

$$|\langle x^k, y^k \rangle| \leq \|x^k\| \|y^k\| \leq \|x^k\| M$$

Ved at bruge regnereglerne for grænseværdier i Sætning 6.1(s. 88 i bogen) og $\lim_{k\to\infty} M = M$, da M er konstant, opnås:

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k\| \, M = \lim_{k\to\infty} \|x^k\| \, \lim_{k\to\infty} M = \| \lim_{k\to\infty} x^k \| \, M = \|0\| \, M = 0$$

Da $\{|\langle x^k, y^k \rangle|\}_{k=1}^{\infty}$ er en talfølge og $\lim_{k\to\infty} \|x^k\| \, M = 0$ er $\{|\langle x^k, y^k \rangle|\}_{k=1}^{\infty}$ konvergent(jf. Lemma 4.8(b)(s. 50 i bogen), og $\lim_{k\to\infty} |\langle x^k, y^k \rangle| = 0$. Ifølge Lemma 4.8(a)(s. 50 i bogen), så gælder

$$\lim_{k\to\infty} |\langle x^k, y^k \rangle| = | \lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle | = \lim_{k\to\infty} \langle x^k, y^k \rangle = 0$$