Opgave 229 (Entydighed af grænseværdi)

Bevis, at en funktion højst kan have én grænseværdi for $x \to b$.
Antag for modstrid, at der findes to grænseværdier c' og $c'' \neq c'$ for $x \to b$. Lad $\varepsilon = \frac{|c''-c'|}{2}$ være givet. Vi ved at

$$\exists \delta_1 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c'| < \varepsilon,$$

og

$$\exists \delta_2 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - c''| < \varepsilon.$$

Sæt $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. For $0 < \|x - b\| < \delta$ gælder

$$|c'' - c'| = |c'' - f(x) + f(x) - c'| \leq |f(x) - c''| + |f(x) - c'| < 2\varepsilon = |c'' - c'|,$$

hvilket er en modstrid.