Opgave 230 Bevis for Lemma 6.33

Underopgave A

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, og lad $b \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}$. Funktionen f har en grænseværdi for $x \to b$. Det bevises, at f er begrænset i nærheden af b.

Lad indledningsvist

$$f(x) \to c \text{ for } x \to b.$$

Da f har grænseværdien c for x gående mod b gælder – jf. (a) i Definition 6.31 – at f er defineret i nærheden af b. Ydermere gælder – jf. (b) i Definition 6.31 – at

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \tag{1}$$

Lad $\varepsilon = 1$. For $\varepsilon = 1$ i (1) gælder, at

$$\exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < 1.$$

Trekantsuligheden giver, at

$$1 > |f(x) - c| \geq ||f(x)| - |c|| \geq |f(x)| - |c|.$$

Altså gælder, at $|f(x)| - |c| < 1$, derfor kan $|f(x)|$ let isoleres.

$$|f(x)| < 1 + |c|.$$

Ergo har $f(x)$ en øvre grænse og er dermed begrænset.

$\blacksquare$

Underopgave B

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, og lad $b \in \mathbb{R}^n$ og $c \in \mathbb{R}_{>0}$[1]. Funktionen f har en grænseværdi c for $x \to b$. Det bevises, at der eksisterer et reelt tal k således, at $f(x) \geq k$ i nærheden af b.

Lad indledningsvist

$$f(x) \to c \quad \text{for} \quad x \to b,$$

Da f har grænseværdien c for x gående mod b gælder – jf. (a) i Definition 6.31 – at f er defineret i nærheden af b. Ydermere gælder – jf. (b) i Definition 6.31 – at

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon. \tag{2}$$

Lad $\varepsilon = c/2 > 0$. For $\varepsilon = c/2$ i (2) gælder, at

$$\exists \delta > 0 : 0 < ||x - b|| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \frac{c}{2}. \tag{3}$$

Eftersom $|\alpha| \leq b \Leftrightarrow -b \leq \alpha \leq b$, gælder ud fra (3), at

$$-\frac{c}{2} < f(x) - c < \frac{c}{2}.$$

Isoleres $f(x)$ fås

$$\frac{c}{2} < f(x) < \frac{3}{2}c.$$

Eftersom $c/2 > 0$ gælder, at

$$0 < \frac{c}{2} < f(x) \tag{4}$$

Ud fra (4) ses, at der eksisterer et reelt tal k således, at $f(x) \geq k$ i nærheden af b.

■

[1] $\mathbb{R}_{>0} = \{c \in \mathbb{R} : c > 0\} = R_+ \backslash \{0\}$