# Opgave 231

**Regneregler for grænseværdier(Bevis for Sætning 6.2)**
Lad $f, g : A \to \mathbb{R}$ være funktioner, som begge har grænseværdier for $x \to b$.

## Ad a)

Bevis, at funktionen $|f|$ har en grænseværdi for $x \to b$, og at

$$\lim_{x\to b}|f(x)| = |\lim_{x\to b} f(x)|$$

*Bevis.* Grænseværdien for $|f|$ eksisterer, hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |c|| < \varepsilon$$

Vi ved

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og anvend trekantsuligheden:

$$||f(x)| - |c|| \leq |f(x) - c| < \varepsilon$$

Da $f$ har grænseværdi $c$, gælder

$$\lim_{x\to b}|f(x)| = |\lim_{x\to b} f(x)|.$$

$\blacksquare$

## Ad b)

Bevis, at for $r \in \mathbb{R}$ har funktionen $rf$ en grænseværdi for $x \to b$, og

$$\lim_{x\to b} rf(x) = r \lim_{x\to b} f(x)$$

*Bevis.* Grænseværdien for $rf$ eksisterer, hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |rf(x) - rc| < \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet og $r \neq 0$:

$$|rf(x) - rc| = |r||f(x) - c| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(c) - c| < \frac{\varepsilon}{|r|}$$

Vælg $\delta$, som afparerer $\frac{\varepsilon}{|r|}$, så $\lim_{x \to b} rf(x) = r \lim_{x \to b} f(x)$. ∎

## Ad c)

Bevis, at funktionen $f + g$ har en grænseværdi for $x \to b$, og at

$$\lim_{x \to b}(f + g)(x) = \lim_{x \to b} f(x) + \lim_{x \to b} g(x)$$

*Bevis.* Grænseværdien for $(f + g)(x)$ eksisterer, hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (c_1 + c_2)| < \varepsilon.$$

Vi har

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

og

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sæt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Heraf følger

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |f(x) - c_1| + |g(x) - c_2| < \varepsilon.$$

Af trekantsuligheden følger

$$|f(x) - c_1 + g(x) - c_2| \leq |f(x) - c_1| + |g(x) - c_2| < \varepsilon$$

Og altså

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |(f(x) + g(x)) - (c_1 + c_2)| < \varepsilon.$$

Altså eksisterer grænseværdien, og

$$\lim_{x \to b}(f + g)(x) = \lim_{x \to b} f(x) + \lim_{x \to b} g(x).$$

∎

## Ad d)

Bevis, at funktionen $fg$ har en grænseværdi for $x \to b$, og

$$\lim_{x\to b}(fg)(x) = \lim_{x\to b} f(x) \lim_{x\to b} g(x)$$

*Bevis.* Grænseværdien for $(fg)$ eksisterer, hvis:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |f(x)g(x) - c_1c_2| < \varepsilon$$

Lad $\varepsilon > 0$ være givet.
Da $f(x) \to c_1$ for $x \to b$, så er $f$ begrænset af en konstant $k_1 > 0$ på den udprikkede kugle $\dot{B}_{\delta_1}(x)$ jf. Lemma 6.33. Sæt $M_1 = \max\{|c_1|, k_1\}$.
Ligeledes da, $g(x) \to c_2$ for $x \to b$, så er $g$ begrænset af en konstant $k_2 > 0$ på den udprikkede kugle $\dot{B}_{\delta_2}(x)$ jf. Lemma 6.33. Sæt $M_2 = \max\{|c_2|, k_2\}$.
Betragt ved trekantsuligheden at:

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - c_1c_2| &= |f(x)g(x) - f(x)c_2 + f(x)c_2 - c_1c_2| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)c_2| + |f(x)c_2 - c_1c_2| \\ &\leq |f(x)||g(x) - c_2| + |c_2||f(x) - c_1| \end{aligned}$$

Vi vælger

$$\begin{aligned} 0 < \|x - b\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - c_1| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \\ 0 < \|x - b\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c_2| < \frac{\varepsilon}{2M_2} \end{aligned}$$

Vælg $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Herved får vi

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - c_1c_2| &\leq |f(x)||g(x) - c_2| + |c_2||f(x) - c_1| \\ &\leq M_1\frac{\varepsilon}{2M_1} + M_2\frac{\varepsilon}{2M_2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Altså eksisterer grænseværdien og

$$\lim_{x\to b}(fg)(x) = \lim_{x\to b} f(x) \lim_{x\to b} g(x)$$

■

## Ad e)

Bevis, at hvis $\lim_{x\to b} g(x) \neq 0$, har funktionen $\frac{1}{g}$ en grænseværdi for $x \to b$, og

$$\lim_{x\to b} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x\to b} g(x)}$$

*Bevis.* Definér $\lim_{x\to b} g(x) = c$. Grænseværdien for $\frac{1}{g}(x)$ eksisterer, hvis $\frac{1}{g}(x)$ er defineret i nærheden af $b$, og hvis

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon$$

- $\frac{1}{g}(x)$ er defineret i nærheden af $b$:
  Vi ved:

  $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon$$

  og at $|c| > 0$. Sæt $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Så findes $\delta_1 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - c| < \frac{\varepsilon}{2}$.
  Så anvendes trekantsuligheden:

  $$|c| - |g(x)| \leq ||c| - |g(x)|| \leq |g(x) - c| < \frac{|c|}{2}.$$

  Dermed har vi: $|c| - |g(x)| < \frac{|c|}{2}$ som medfører $\frac{|c|}{2} < |g(x)|$. Dermed er $\frac{1}{g}(x)$ defineret i nærheden af $b$.

- Vi skal vise: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{c} \right| < \varepsilon$

  Idet $g(x) \to c$, har vi

  $$\exists \delta_2 > 0 : 0 < \|x - b\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - c| < \varepsilon |c| \frac{|c|}{2}.$$

  Vi vælger $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Så har vi

  $$\left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{c - g(x)}{cg(x)} \right| = \frac{|c - g(x)|}{|c||g(x)|} < \frac{\varepsilon |c| \frac{|c|}{2}}{|c| \frac{|c|}{2}} = \varepsilon$$

Altså eksisterer grænseværdien, og

$$\lim_{x \to b} \frac{1}{g}(x) = \frac{1}{\lim_{x \to b} g(x)}$$

$\blacksquare$

## Ad f)

> Bevis, at hvis $\lim_{x \to b} g(x) \neq 0$, har funktionen $\frac{f}{g}$ en grænseværdi for $x \to b$, og
> $$\lim_{x \to b} \frac{f}{g}(x) = \frac{\lim_{x \to b} f(x)}{\lim_{x \to b} g(x)}$$

*Bevis.* Det følger af ($d$) og ($e$), at

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to b} \frac{f}{g}(x) &= \lim_{x \to b} f(x) \lim_{x \to b} \frac{1}{g}(x) \\
&= \lim_{x \to b} f(x) \frac{1}{\lim_{x \to b} g(x)} \\
&= \frac{\lim_{x \to b} f(x)}{\lim_{x \to b} g(x)}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$