Analyse 1: Opgave 234

G4-111

29. oktober 2015

Opgave 234. Grænseværdi for en monoton funktion (Bevis for Sætning 6.41 og Sætning 6.43).

(a) *Lad* $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ *være en voksende og begrænset funktion og sæt* $c = \sup\{f(x)|x \in [a, b[\}$. *Bevis, at* $f(x) \to c$ *for* $x \to b_-$.

Lad $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ være en voksende og begrænset funktion. Da f er voksende og begrænset, må den have en mindste øvre grænse $c = \sup\{f(x)\}$, hvor det gælder at $\forall x : \ f(x) \leq c$. Da f er voksende, gælder

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Givet et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, eksisterer der et $\delta > 0$ sådan at for alle $x \in]b - \delta, b[$ gælder det at

$$c \geq f(x) > c - \varepsilon$$

ellers ville der eksistere en øvre grænse mindre end c. Ved yderligere beregninger fås

$$0 \geq f(x) - c > -\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq c - f(x) < \varepsilon$$

Da $f(x) \leq c$ må det gælde at $|c - f(x)| < \varepsilon$ for $x \in]b - \delta, b[$. Da funktionen er defineret på $[a, b[$ må der for $x \in [a, b[$ gælde, at $x < b$, hvorfor $0 < b - x$. Da fås

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

Hvilket betyder $f(x) \to c$ for $x \to b_-$ ■

(b) *Lad* $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *være monoton og begrænset. Bevis, at* $f(x)$ *har en grænseværdi for* $x \to b_-$.

Lad $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ være en monoton og begrænset funktion. Da funktionen er begrænset eksisterer $c = \sup\{f(x)|x \in [a,b[\}$ og $d = \inf\{f(x)|x \in [a,b[\}$. Da f er monoton er den enten voksende eller aftagende. I del (a) blev det bevist, at givet funktionen $f(x)$ er voksende og begrænset, gælder det, at $f(x) \to c$ for $x \to b_-$, hvorved en sådan grænseværdi eksisterer.

Antag at $f(x)$ er aftagende og begrænset. Da gælder det at $\forall x : \ f(x) \geq d$. Da $f(x)$ er aftagende, gælder det at

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Givet $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, eksisterer der et $\delta > 0$ så det gælder for alle $x \in]b-\delta, b[$ at

$$d \leq f(x) < d + \varepsilon$$

ellers ville der eksistere en nedre grænse større en d. Ved yderligere beregninger fås

$$0 \leq |f(x) - d| < \varepsilon$$

Da funktionen er defineret på $[a,b[$, må der for $x \in [a,b[$ gælde at $x < b$, hvorfor $0 < b - x$. Da fås

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon$$

Hvilket betyder $f(x) \to d$ for $x \to b_-$, hvorfor grænseværdien også i dette tilfælde eksisterer.

$\blacksquare$

(c) *Lad* $f : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ *være monoton og begrænset. Bevis, at* $f(x)$ *har en grænseværdi for* $x \to \infty$.

Lad $f : A \to \mathbb{R}$, hvor $A = [a,\infty[$, være monoton og begrænset. Antag UTAG at f er voksende. Da f er begrænset eksisterer en mindste øvre grænse $c = \sup\{f(x)|x \in [a,\infty[\}$. Givet et $\varepsilon > 0$, eksisterer der et $K \in \mathbb{R}$, så det gælder, for alle $x \in A$ hvor $x > K$, at

$$c \geq f(x) > c - \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \geq f(x) - c > -\varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$0 \leq c - f(x) < \varepsilon$$

Da fås det at

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} : x > K \Rightarrow |c - f(x)| < \varepsilon \tag{1}$$

Samtidig gælder det at

$$\exists R > 0 : \ \{x \in \mathbb{R} | x > R\} \subset A \tag{2}$$

hvilket ses ved at sætte $R = |a|$. Da både (1) og (2) er opfyldt, gælder det at $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, hvilket beviser, at $f(x)$ har en grænseværdi for $x \to \infty$.

$\blacksquare$