Analyse 1 - Aflevering 6

Gruppe G4-104
Department of Mathematics, Aalborg University, Denmark
Teacher: Morten Grud Rasmussen
1 pages

November 2, 2015

Opgave 241

Lad $A \subseteq \mathbb{R}$, lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en reel funktion defineret på A, og lad $b \in \mathbb{R}$. Bevis, at hvis begge grænseværdier $\lim_{x\to b^+} f(x)$ og $\lim_{x\to b^-} f(x)$ eksisterer og

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x) = c, \tag{1}$$

så eksisterer grænseværdien $\lim_{x\to b} f(x)$, og den er lig med den fælles værdi af grænseværdierne i (1).

For at bevise, at grænseværdien for f i b er den samme som grænseværdien fra højre og fra venstre, skal det bevises at f er defineret i nærheden af b, og at der gælder følgende:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A : 0 < |x - b| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon. \tag{2}$$

Hvis grænseværdien fra højre og fra venstre eksisterer, så eksisterer der $r_-, r_+ > 0$, ~~som tilhører A~~, så f er defineret i intervalerne $]b - r_-, b[$ og $]b, b + r_+[$. Det betyder, at f er defineret i den åbne udprikkede kugle $\dot{B}_r(b)$, hvor $r = \min(r_-, r_+)$. Altså er f defineret i nærheden b. Lad et $\epsilon > 0$ være givet.
Da grænseværdien for f i b fra højre er c gælder der, at

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_+ > 0 \ \forall x \in A : 0 < x - b < \delta_+ \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon. \tag{3}$$

På samme måde gælder der, at

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_- > 0 \ \forall x \in A : 0 < b - x < \delta_- \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon. \tag{4}$$

Ifølge (3) og (4) eksisterer der et δ_- og δ_+ så $0 < x - b < \delta_- \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$ og $0 < b - x < \delta_+ \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$.
Ved at vælge et δ således at $\delta = \min(\delta_-, \delta_+)$, gælder der dermed at $0 < x - b < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$ og $0 < b - x < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$, hvilket er ensbetydende med at $0 < |b - x| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$. Dermed eksisterer der, for ethvert ϵ, et δ, der afparerer det givne ϵ. Og dermed eksisterer grænseværdien for f og $f \to c$ for $x \to b$.

$\blacksquare$