# Opgave 242

Lad $f:\ ]a,\infty[$ og $g:\ ]b,\infty[$ være to reelle funktioner, sådan at $g(x) \in\ ]a,\infty[$ for $x \in\ ]b,\infty[$. Bevis, at hvis $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ og $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, så gælder $f(g(x)) \to c$ for $x \to \infty$ (uanset om $c \in \mathbb{R}$ eller $c = \pm\infty$).

Det vides, at begge funktioner er defineret i nærheden af uendeligt. Det vil sige at

$$\exists R_1 > 0 : \{y \in \mathbb{R} \mid y > R_1\} \subseteq D_f$$

og

$$\exists R_2 > 0 : \{x \in \mathbb{R} \mid x > R_2\} \subseteq D_g$$

Da $f(x) \to c$ for $x \to \infty$, så gælder

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0 : y > K \Rightarrow |f(y) - c| < \varepsilon \tag{1}$$

og da $g(x) \to \infty$ for $x \to \infty$ så gælder

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow g(x) > K \tag{2}$$

Skal vise

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 : g(x) > K \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \tag{3}$$

Da $g(x) \in D_f$ er $f$ defineret på $g(x)$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Der kan ifølge (1) findes et $K$ stort nok som afparrerer dette $\varepsilon$. Vi lader dette $K$ være det $K$ der bruges i (2) som siger at der eksisterer et stort nok $M$ sådan at $g(x)$ er større end det valgte $K$. Derfor gælder det også at hvis $g(x)$ substitueres med $y$ i (1) fås,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ M > 0 : x > M \Rightarrow |f(g(x)) - c| < \varepsilon \tag{4}$$

Dette beviser tilfældet hvor $c \in \mathbb{R}$, det andet tilfælde er hvor $c = \infty$.

Skal vise

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(g(x)) > K \tag{5}$$

Hvis grænseværdien for $f(x)$ er $\infty$ for $x \to \infty$ så gælder

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists M > 0 : y > M \Rightarrow f(y) > K. \tag{6}$$

Der udover har vi antagelsen i (2). Antagelsen siger at der findes et $x$ sådan at $x > M$ medfører at $g(x)$ er større end et eller andet vilkårligt stort tal. Dette kan nu sættes sammen til,

$$\forall K \in \mathbb{R}\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(g(x)) > K \tag{7}$$

∎