Bevis for L'Hôpitals regel om 0/0-udtryk ved grænseovergangene $x \to a^-$ og $x \to a$ (Sætning 7.20)

(a) Tilfældet $x \to a^-$. Antag, at f og g er definerede i et interval $]a-\rho, a[$ til venstre for punktet a, og at der gælder

$$\begin{aligned} f(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to a^-, \\ g(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to a^- \text{ og} \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} &\to c \quad \text{for} \quad x \to a^-. \end{aligned}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to a^-. \tag{1}$$

Vi definerer to funktioner $\tilde{f}(x) = f(-x)$ og $\tilde{g}(x) = g(-x)$, de afledte bliver da

$$\tilde{f}'(x) = \frac{d}{dx} f(-x) = -f'(-x) \quad \text{og tilsvarende } \tilde{g}'(x) = -g'(-x), \tag{2}$$

hvor vi bruger kædereglen.
Vi har nu at

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to a^- \quad \Rightarrow \quad \frac{f'(-x)}{g'(-x)} = \frac{\tilde{f}'(x)}{\tilde{g}'(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to (-a)^+. \tag{3}$$

Det må også gælde, at

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to (-a)^+, \\ \tilde{g}(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to (-a)^+. \end{aligned}$$

Nu har vi ændret problemet så vi kommer fra højre i stedet for venstre, og dette tilfælde er allerede blevet behandlet i bogen, så vi ved at dette medfører, at

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to (-a)^+ \tag{4}$$

til sidst ændrer vi tilbage til $f(x)$ og $g(x)$, så

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to a^-, \tag{5}$$

som var det vi skulle vise.

(b) Tilfældet $x \to a$. Antag, at f og g er definerede i nærheden af a, og at der gælder

$$\begin{aligned} f(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to a, \\ g(x) &\to 0 \quad \text{for} \quad x \to a \text{ og} \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} &\to c \quad \text{for} \quad x \to a. \end{aligned}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to c \quad \text{for} \quad x \to a. \tag{6}$$

Vi kigger på de to tilfælde hvor x kommer fra højre og fra venstre hver for sig.

- Fra højre: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : 0 < x - a < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon.$
- Fra venstre: $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : 0 < x - a < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon.$

Lad $\epsilon > 0$ være givet, sæt $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, bemærk at $x \neq a$ så enten er $x > a$ eller $x < a$, så

- $x > a$: $0 < |x - a| = x - a < \delta \leq \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon.$
- $x < a$: $0 < |x - a| = a - x < \delta \leq \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon.$

for alle x, dermed må det gælde, at

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon. \tag{7}$$