Bevis for L'Hôpitals regel om 0/0-udtryk og grænseværdi ∞

Antag, at f og g er definerede i et interval $]a, a+p[$ til højre for punktet a, og at der gælder

$$f(x) \to 0 \quad for \quad x \to a^+ \tag{1}$$

$$g(x) \to 0 \quad for \quad x \to a^+ \tag{2}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \to \infty \quad for \quad x \to a^+ \tag{3}$$

Bevis, at så gælder der

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \quad for \quad x \to a^+$$

Vink: Tilpas argumentet i beviset for sætning 7.20.

i) Først defineres $f(a) = 0$ og $g(a) = 0$. Funktionerne f og g er begge definerede og kontinuerte i $]a, a+\rho[$. De er kontinuerte i ethvert punkt af $]a, a+\rho[$ ifølge sætning 7.5, og det følger af (1) og (2) og sætning 6.35, at de er kontinuerte i a. Sætning 7.5 siger, at hvis f er differentiabel i a er f kontinuert i a, og sætning 6.35 siger, at f er kontinuert i b, hvis og kun hvis $f(x) \to f(b)$ for $x \to b$.

ii) Bemærk, at antagelsen (3) blandt andet betyder, at funktionen $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ er defineret i et interval $]a, a+\rho_1[$ til højre for a, og altså specielt, at $g'(x) \neq 0$ i dette interval. Da $f(x)$ og $g(x)$ skal være definerede for at $f'(x)$ og $g'(x)$ kan være det, antages $\rho_1 \leq \rho$.
Det ses, at brøken $\frac{f(x)}{g(x)}$ også er defineret i intervallet $]a, a+\rho_1[$. Lad $a < x < a+\rho_1$. Da opfylder g antagelserne i Middelværdisætningen på intervallet $[a, x]$, og derfor eksisterer der er et $\xi \in]a, x[$ således, at:

$$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = g'(\xi)$$

som er $\neq 0$. Da $x \neq a$ og $g(a) = 0$, fås heraf, at $g(x) \neq 0$.

iii) Da vi skal vise at:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \infty \quad for \quad x \to a^+$$

bruges definition 6.36, som siger, at hvis:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} > M \tag{4}$$

gælder, så divergerer grænseværdien mod ∞.

Det vides, at:

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : 0 < ||x-a|| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} > M \tag{5}$$

Vi lader nu $M > 0$ være givet og vælger δ, som opfylder (5). Vi vil vise, at det samme δ opfylder (4). Det vides, at x kan vælges vilkårligt, så $a < x < a + \rho$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

Da f og g opfylder forudsætningerne i Cauchys middelværdisætning på intervallet $[a, x]$, eksisterer der et $\xi \in]a, x[$, sådan at følgende gælder:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - f(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

og da $a < \xi < x < a + \rho$, følger det heraf, at:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > M$$

Dermed er det vist, at

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \infty \quad for \quad x \rightarrow a^+$$

.

$\blacksquare$